Matematica&Realtà

Gara di modellizzazione matematica - Selezione SFIDE

Sezione Intermedia

Rispondere ai quesiti seguenti
motivando le risposte ed eventualmente aggiungendo un commento

Foreste vergini

Fra il 2000 e il 2013, il mondo ha perso il 7,2% delle sue foreste vergini: ne sono spariti 919.000 chilometri quadrati, un'area grande come il Venezuela.
I ricercatori dell'Università del Maryland, negli Stati Uniti, hanno coordinato il lavoro di colleghi in Europa, Nord America e Asia, confrontando le foto dei satelliti nel periodo preso in considerazione. Il risultato del loro lavoro è stato pubblicato sulla rivista «Science Advances». Le foreste vergini, per lo studio, sono quelle di almeno 500 km quadrati che non presentano segni di attività umana. Hanno un ruolo fonda-mentale nell'assorbire anidride carbonica (riducendo l'effetto serra), proteggere la biodiversità e regolare il flusso dell'acqua negli ecosistemi.

Fonte: Corriere.it articolo del 27/01/2017 di Silvia Morosi

Quesito proposto dalla Prof.Clara Petrone, IC Baronissi (SA)

1. Costruire un modello che descriva la deforestazione, assunto un andamento di tipo lineare.

2. Sulla base del modello, prevedere l'estensione delle foreste vergini nel 2020.

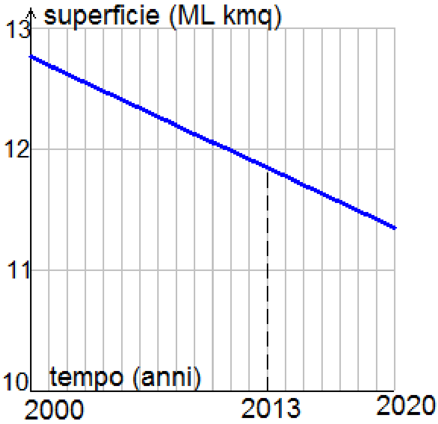
3. Tenuto conto che "la deforestazione accelera: fra il 2011 e il 2013 è stata il triplo che nel periodo 2000-2010", modificare il modello del punto 1 ed aggiornare la stima del punto 2.

Svolgimento. 1. Adottiamo un modello del tipo $s = s(t) = f_0 + mt \quad t \geq 0$ dove t è il tempo (anni) a partire dal 2000, assunto come anno zero, ed $s(t)$ rappresenta la superficie complessiva di foreste vergini (km^2) all'anno t.
Determiniamo innanzi tutto l'ordinata all'origine s_0, cioè la superficie delle foreste all'anno zero. Dal testo si deduce che

$$7{,}2\% \cdot s_0 = 919.000 \quad km^2$$

da cui

$$s_0 = \frac{919.000}{0{,}72} \cong 12.763.888 \quad km^2$$



Osservato che il coefficiente angolare m rappresenta il valore medio annuale della deforestazione, valutiamo m *distribuendo* la deforestazione complessiva $919.000 \quad km^2$ nei 13 anni (dal 2000 al 2013):

$$m = -\frac{919.000}{13} \cong -70.692 \quad km^2 / anno$$

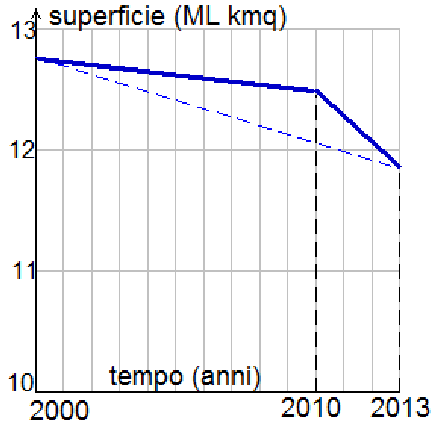
In definitiva, la funzione lineare che descrive l'andamento della deforestazione ha la seguente espressione

$$s(t) = 12.763.888 - 70.692\, t \quad t \geq 0$$

2. Si tratta semplicemente di valutare

$$s(20)=12.763.888-70.692\cdot 20=11.350.048 \quad km^2$$

3. In questo caso il modello lineare deve essere modificato. Possiamo adottare un modello lineare a tratti



$$s^*(t)=\begin{cases} s_1(t) & 0\le t\le 10 \\ s_2(t) & t>10 \end{cases}$$

rappresentato da un spezzata composta di due segmenti (vedi grafico a lato).
I punti noti della spezzata sono:

$$P_0=(0,s(0)) \quad \text{e} \quad P_{13}=(13,s(13))$$

Ricordando l'equazione del fascio di rette per un punto, le due funzioni da determinare s_1 ed s_2 soddisferanno le condizioni seguenti:

$$s_1(t)=s(0)-mt \qquad s_2(t)=s(13)-3m(t-13)$$

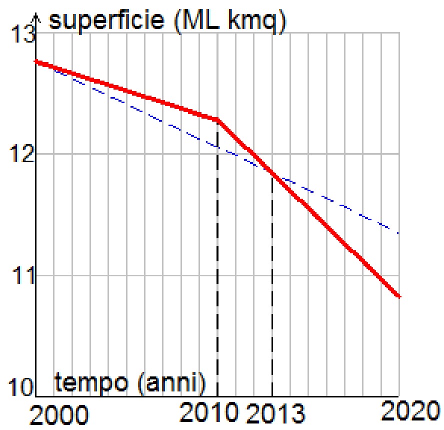
inoltre, imponendo che le due funzioni assumano lo stesso valore in $t=10$, si ha

$$s_1(10)=s_2(10) \iff s(0)-10m=s(13)+9m \iff 12.763.888-10m=11.844.892+9m$$

da cui

$$19m=918.996 \quad \Rightarrow \quad m\cong 48.368$$

In conclusione il nuovo modello sarà



$$s^*(t)=\begin{cases} 12.763.888-48.368\ t & 0\le t\le 10 \\ 11.844.892-145.105\,(t-13) & 10\le t \end{cases}$$

Secondo questo nuovo modello, per stimare l'estensione delle foreste vergini nel 2020 è sufficiente valutare

$$s^*(20)=11.844.892-145.105\,(20-13)\cong 10.829.157$$

Secondo questo nuovo modello, la deforestazione media annua nel periodo 2000-2010 è stimata in $48.368 \quad km^2$

mentre quella fra il 2010 e il 2013 è stimata in $145.105 \quad km^2$

Un panettone gigante

Sabato 4 dicembre in piazza Carignano a Torino alle 10,45, sarà possibile assaggiare il panettone più grande di Torino. Il panettone - mezzo quintale di autentica bontà - sarà offerto a tutti i presenti. A tagliarlo sarà un ospite d'eccezione, il Sindaco Sergio Chiamparino, affiancato da Maria Luisa Coppa (Presidente Ascom), uniti per dare il via a due giornate di raccolta fondi a sostegno del reparto di neonatologia dell'ospedale Sant'Anna di Torino.

Fonte: http://www.targatocn.it/2010/12/03/mobile/leggi-notizia/argomenti/targato-curiosita/articolo/50-chili-e-2-giorni-di-buone-azioni-con-maina-ovvero-un-panettone-gigante.html

Quesito proposto dalla Prof. Angela Ponzone,
LS Montessori, Roma

1. Se il panettone da 1Kg è alto circa 16 cm, quanto sarà alto il panettone da 50Kg ?

2. Determinare una funzione che descriva l'altezza del panettone in relazione al suo peso.

Svolgimento. 1. Assunto che i due dolci abbiano lo stesso peso specifico e i due solidi siano figure simili, si deduce che il rapporto dei pesi è pari al rapporto del cubo delle altezze, da cui

$$(altezza\ panettone\ gigante)^3 = 16^3 \cdot \frac{50}{1}$$

$$altezza\ panettone\ gigante = 16 \cdot \sqrt[3]{50} \cong 59\ cm$$

2. Indicata con h l'altezza (cm) e indicato con P il peso (kg) di un generico panettone, risulta

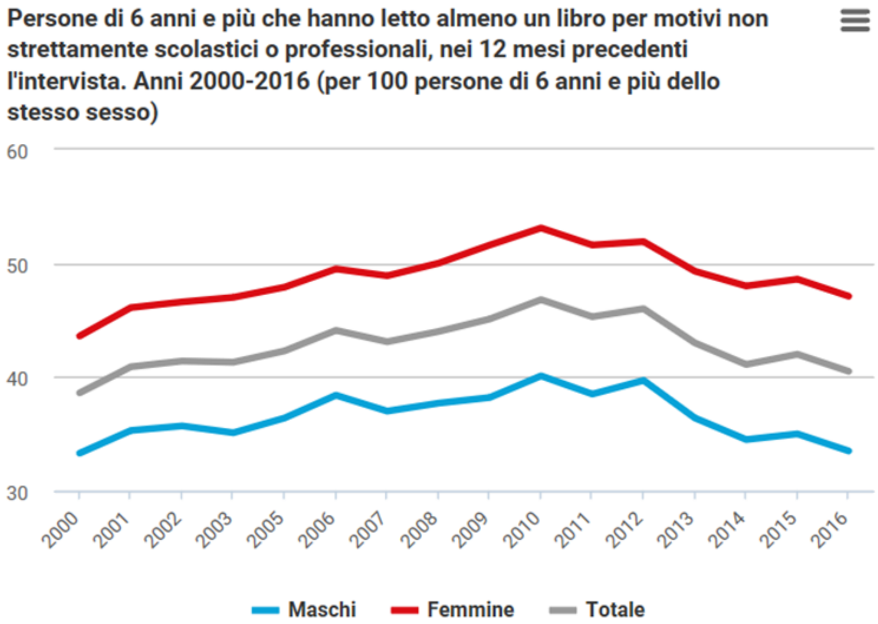
$$\frac{P}{1} = \frac{h^3}{16^3}$$

da cui

$$h = 16 \cdot \sqrt[3]{P}$$

Lettori italiani nel 2016

Ancora in calo i lettori, passati dal 42,0% della popolazione di 6 anni e più del 2015 al 40,5% nel 2016. Si tratta di circa 23 milioni di persone che dichiarano di aver letto almeno un libro nei 12 mesi precedenti l'intervista per motivi non strettamente scolastici o professionali.
La popolazione femminile mostra una maggiore propensione alla lettura già a partire dai 6 anni di età: complessivamente il 47,1% delle donne, contro il 33,5% dei uomini, ha letto almeno un libro nel corso dell'anno.
Leggono di più i giovani tra gli 11 e i 14 anni (51,1%) rispetto a tutte le altre classi di età.



Fonte: ISTAT, Comunicato stampa del 27 dicembre 2017

a) Come mostra il grafico allegato, il maggior numero di lettori si è avuto nel 2010. In tale anno la percentuale di coloro che avevano letto almeno un libro era del 46,8%.
Costruire un modello lineare che stimi l'andamento della percentuale dei lettori italiani nel periodo 2010-2016. Sulla base del modello, se la tendenza non dovesse modificarsi, in quale anno il numero di lettori scenderà al di sotto del 35%?

b) Dal grafico sembra che la forbice fra uomini e donne sia rimasta costante del 2010 al 2016, Verificare se l'impressione è corretta mediante due modelli analoghi a quello del punto a), riferiti alla popolazione femminile e alla popolazione maschile, rispettivamente.

Quesito proposto dal Prof. B.Scimmi, LS Jacopone, Todi (PG)

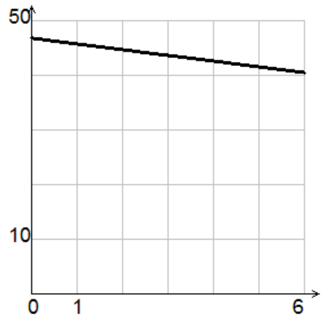
Svolgimento. a) Assunto il 2010 come "anno zero", la percentuale $p(t)$ di lettori italiani all'anno t è espressa dalla legge

$$p(t) = p(0) + mt = 46{,}8 + mt \qquad t \geq 0$$

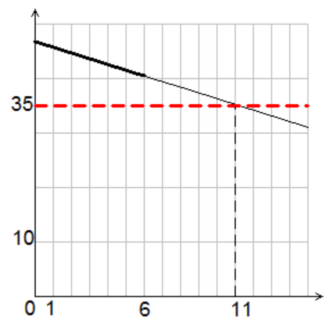
ove il coefficiente angolare m coincide con la variazione percentuale media nell'intervallo $[0,6]$ (corrispondente al periodo $[2010, 2016]$)

$m = \dfrac{40{,}5 - 46{,}8}{6} \cong -1{,}05\%$ In definitiva si ha (cfr. immagine a lato)

$$p(t) = 46{,}8 - 1{,}05t \qquad 0 \leq t \leq 6$$



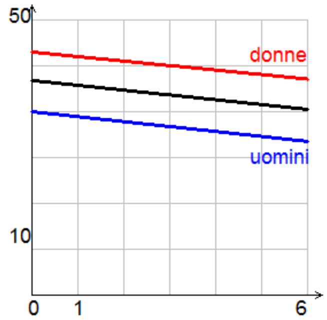
Assunto un trend invariato, adottiamo la funzione come modello della situazione anche dopo il 2016.
Per rispondere al quesito risolviamo quindi la disequazione (vedi anche immagine a lato)



$$p(t) \le 35 \quad \Rightarrow \quad 46{,}8 - 1{,}05t \le 35 \quad \Rightarrow \quad t \ge \frac{11{,}8}{1{,}05} \cong 11{,}23$$

Possiamo quindi prevedere che la percentuale di 35% si raggiungerebbe nel 2022 (in corrispondenza a $t = 12$).

b) Adottando due modelli analoghi a quello del punto a), si avrebbe



- Modello popolazione femminile:
  lettura stimata all'anno "zero" : 53%
  tasso di variazione percentuale medio del peri odo:

$$m_d = \frac{47{,}1 - 53}{6} \cong -0{,}98\%$$

Da cui

$$p_d(t) = 53 - 0{,}98t \qquad 0 \le t \le 6$$

- Modello popolazione femminile:
  lettura stimata all'anno "zero" : 40%
  tasso di variazione percentuale medio del peri odo:

$$m_u = \frac{33{,}5 - 40}{6} \cong -1{,}08\%$$

Da cui

$$p_u(t) = 40 - 1{,}08t \qquad 0 \le t \le 6$$

Dai due modello possiamo dedurre che la forbice fra uomini e donne è pressoché costante.
Infatti i due tassi di variazione media sono molto vicini e le rette nel grafico appaiono parallele.

Parcometro a Todi

1. Costruisci un modello che descriva il tempo (minuti) di sosta consentito in funzione del denaro (euro) immesso nel parcometro.

N.B. Monete accettate: 0,10 €, 0,20 €, 0,50 €, 1 €, 2 €.

Sulla base del modello,

2. Valuta la massima sosta consentita se si inseriscono nel parcometro € 2,10

3. Quale cifra minima occorre per una sosta di 1 ora e 35 minuti?

Quesito proposto dal Prof.Benedetto Scimmi, LS Jacopone, Todi (PG)

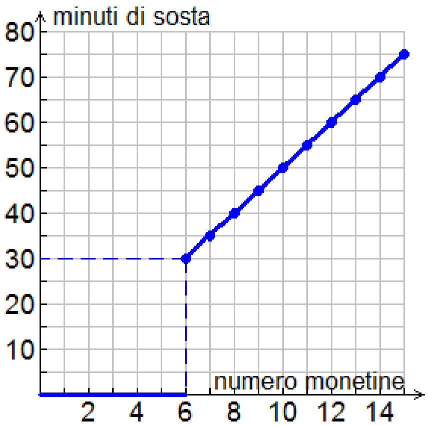
Svolgimento. **1.** Osservato che la spesa (quando prevista) è proporzionale al tempo di sosta, determiniamo innanzi tutto il tempo di sosta corrispondente alla monetina di 10 centesimi (valore minimo): $t_{\min} = 60 \cdot \frac{0{,}10}{1{,}20} = 5$ minuti

Indicato con n il numero di monetine da 10 centesimi inserite nel parcometro, la successione che esprime il tempo corrispondente t_n (in minuti) è data dall'espressione:

$$t_n = \begin{cases} 0 & 0 \le n < 6 \\ 5n & n \ge 6 \end{cases} \qquad n \in N$$

la cui funzione supporto è

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 6 \\ 5x & x \ge 6 \end{cases} \qquad x \ge 0$$



2. Si tratta di valutare il termine t_n per $n = \frac{210}{10} = 21$, da cui

$$t_{21} = 21 \cdot 5 = 105^m = 1^h\ 45^m$$

Si tratta di risolvere l'equazione

$$5 \cdot n = 60 + 35 \qquad n \in N$$

la cui unica soluzione è $n = 19$.

In conclusione la somma richiesta per una sosta di $1^h\ 35^m$ è 1,90 €.

Le matrioske

Una *matrioska* (in russo: матрёшка), è il *souvenir* russo per eccellenza e un simbolo dell'arte popolare di quel paese.

Si tratta si un insieme di bambole di diverse dimensioni, ognuna delle quali contiene una di formato più piccolo. La bambolina più grande si chiama "madre", quella più piccola è detta "seme".
Nell'anno 1900, all'Esposizione mondiale di Parigi, la matrioska fu premiata e riconosciuta come simbolo della tradizione russa per la sua popolarità in tutto il mondo. Da allora ha rispecchiato nella sua espressione artistica la vita e la storia della Russia.

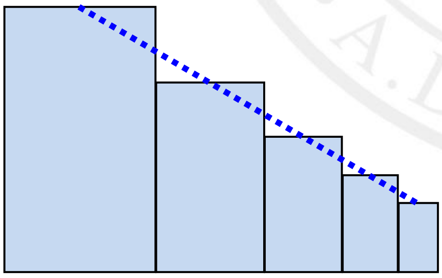
La matrioska più grande del mondo è stata costruita nel 2003 negli Stati Uniti ed è composta da 51 pezzi.
Fonte https://it.wikipedia.org/wiki/MatrioskaQuesito proposto dalla Prof. Cristina Cipolla, LS Montessori, Roma

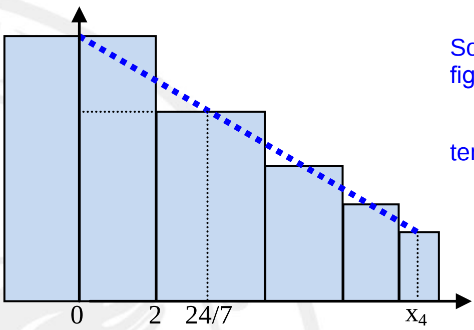
1. Le dimensioni della madre sono: altezza 7 cm, dimensione orizzontale massimale 4 cm; la seconda bambolina è alta 5 cm. L'immagine mostra che le teste delle bamboline sono allineate. Adottando un opportuno sistema di riferimento, determinare il modello lineare che descrive le altezze delle bamboline.

2. Sulla base del modello calcolare l'altezza della bambolina seme.

1. L'immagine suggerisce un rapporto di *similitudine* fra la bambolina contenente e quella contenuta, quindi una relazione di proporzionalità diretta fra le loro dimensioni.

Iniziamo ad affrontare il quesito con una rappresentazione grafica. Precisamente rappresentiamo le bamboline mediante rettangoli simili. Il modello geometrico conferma l'allineamento delle teste delle bamboline, che era già evidente dall'immagine.





Sovrapponendo al disegno il sistema di rferimento cartesiano Oxy in figura, possiamo costruire l'equazione della retta

$$y = mx + q$$

tenendo conto delle seguenti condizioni:

- ordinata all'origine $q = 7$
- coefficiente angolare

$$m = \frac{altezza\ \ figlia - altezza\ madre}{semilarghezza\, madre + semilarghezza\ \ figlia}$$

Tenuto conto del rapporto di similitudine, si deduce

$$\frac{semilarghezza\ \ figlia}{semilarghezza\, madre} = \frac{5}{7} \quad \Rightarrow \quad semilarghezza\ \ prima\ bambolina = \frac{20}{7}$$

da cui

$$m = -\frac{7}{12}\ \ m$$

In definitiva l'equazione della retta tratteggiata è

$$y = -\frac{7}{12}x + 7$$

2. Per individuare la'ltezza del seme, denotiamo con x_4 l'ascissa corrispondente al suo asse di simmetria.
Dal citato rapporto di similitudie

$$\frac{semilarghezza\ \ figlia}{semilarghezza\, madre} = \frac{5}{7}$$

segue che

$$x_4 = 2 + 2\left[2\frac{5}{7}\right] + 2\left[2\left(\frac{5}{7}\right)^2\right] + 2\left[2\left(\frac{5}{7}\right)^3\right] + 2\left(\frac{5}{7}\right)^4 = \frac{21312}{2401} \cong 8,87$$

Ora siamo in grado di calcolare l'altezza del seme

$$y(x_4) = -\frac{7}{12}\frac{21312}{2401} + 7 = \frac{625}{343} \cong 1,82$$

Viaggio a Bevagna

Progettando un viaggio in auto da Telese Terme (BN) a Bevagna (PG), sono consigliati due possibili itinerari (vedi immagine seguente).

Itinerario A: prevede un tratto autostradale da Caianello fino a Orte (A1 CAIANELLO-ORTE Km 218).

Itinerario B: il percorso si svolge totalmente su strade provinciali.

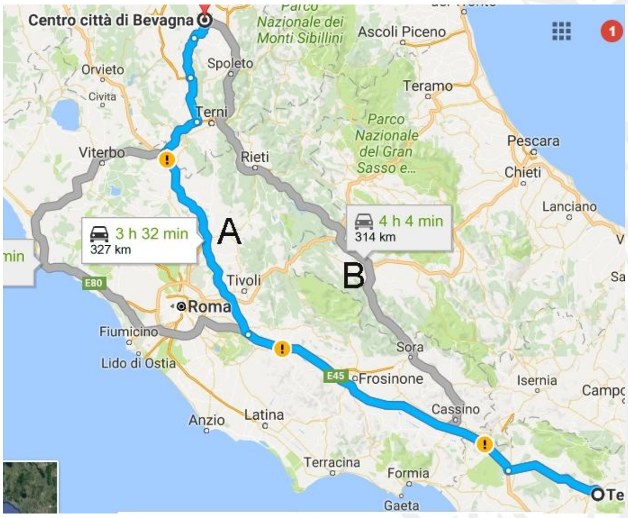
L'immagine consente di confrontare i due percorsi in base alla lunghezza e/o al tempo di percorrenza.

Per un confronto sui costi del viaggio lungo i due itinerari, occorre tener conto di ulteriori informazioni:

il viaggio lungo vie provinciali, con attraversamento di centri urbani, prevede una velocità media intorno ai 60 Km/h con un consumo medio di carburante di circa un litro ogni 18 km.

il viaggio in autostrada consente una velocità max di 130 Km/h con un consumo medio di carburante di un litro ogni 22 Km.
Il transito autostradale prevede il pagamento di un pedaggio.

Quesito proposto dalla Prof. Carmen Di Paola, IIS Telesi@, Telese Terme (BN)



Fonte: Google.maps

Autostrade // per l'Italia
ATTESTATO DI TRANSITO IN PORTA MANUALE

Modalità di pagamento
CONTANTE

Data: 10-09-2016 ore 20:22 Porta: 54 Esattore: 6409
ENTRATA: 033 ORTE
USCITA: 713 CAIANELLO
Pedaggio: Euro 15,20

Costruire un modello che descriva i costi del viaggio in funzione dei chilometri percorsi, lungo ciascun itinerario. (N.B. Si assuma un costo del carburante diesel pari a 1,39 €/litro).
Sulla base del modello confrontare i costi complessivi dei due itinerari.

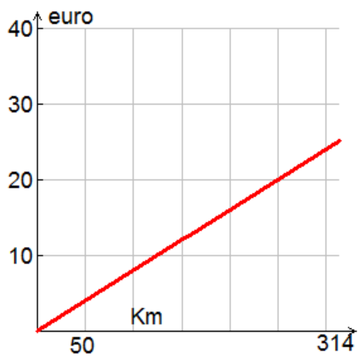
Svolgimento. Nel valutare il costo a chilometro del carburante, si osservi che questo dipende dal consumo medio, in particolare risulta

in relazione ad un consumo di 22 Km/l, il costo a Km è pari a $\frac{1,39}{22} \cong 0,06$ €/Km ;

in relazione ad un consumo di 18 Km/l, il costo a Km è pari a $\frac{1,39}{18} \cong 0,08$ €/Km ;

Denotata con $C_B(x)$ la funzione che descrive i costi in relazione al numero x del chilometri lungo il percorso B, si ha (cfr. immagine a lato)

$$C_B(x) = (\text{costo a chilometro del carburante}) * x = 0,08x \quad 0 \le x \le 314$$



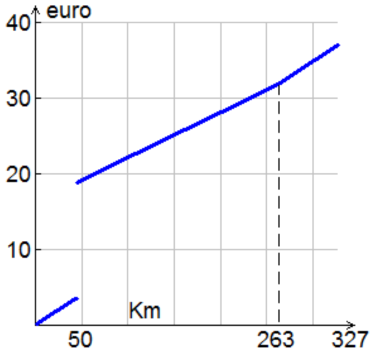
Denotata con $C_A(x)$ la funzione che descrive i costi in relazione al numero x del chilometri lungo il percorso A, si ha

$$C_A(x) = (\text{costo a chilometro del carburante}) * x + \text{costo pedaggio}$$

$$C_A(x)=\begin{cases}0,08x & 0\le x\le 45\\ 0,08\cdot 45+15,20+0,06(x-45) & 45<x<263\\ 0,08\cdot 45+15,20+0,06(263-45)+0,08(x-263) & 263\le x\le 327\end{cases}$$

In definitiva si ha (cfr. immagine a lato)

$$C_A(x)=\begin{cases}0,08x & 0\le x\le 45\\ 18,8+0,06(x-45) & 45<x<263\\ 31,88+0,08(x-263) & 263\le x\le 327\end{cases}$$



Confronto fra i due costi:

il costo complessivo dell'itinerario A è : $C_A(327)=18,8+0,06(263-45)+0,08*(327-263)=37$ €

il costo complessivo dell' itinerario A è : $C_B(327)=0,08*314=25,12$ €

Commento: Come era facile aspettarsi
- il tragitto B è più corto e più economico, ma ha una durata più lunga
- il tragitto A è più breve (anche se più lungo), ma è notevolmente più oneroso per la presenza del pedaggio.

In particolare, il costo del percorso A è superiore a quello del percorso B di oltre il 47%, essendo

$$\frac{37}{25,12}\cdot 100=147,293$$