

# Matematica&Realtà

Gara di modellizzazione matematica - Selezione SFIDE

## Sezione Avanzata

Rispondere ai quesiti seguenti  
motivando le risposte ed eventualmente aggiungendo un commento

### Le matrioske

Una *matrioska* (in russo: матрёшка), è il *souvenir* russo per eccellenza e un simbolo dell'arte popolare di quel paese.

Si tratta di un insieme di bambole di diverse dimensioni, ognuna delle quali contiene una di formato più piccolo. La bambolina più grande si chiama "madre", quella più piccola è detta "seme".

La prima matrioska di cui si ha notizia risale alla fine del XIX secolo, un periodo che per la Russia fu, oltre che di grandi mutamenti sul piano sociale, epoca di grande sviluppo economico e culturale.

Nell'anno 1900, all'Esposizione mondiale di Parigi, la matrioska fu premiata e riconosciuta come simbolo della tradizione russa per la sua popolarità in tutto il mondo. Da allora ha rispecchiato nella sua espressione artistica la vita e la storia della Russia.

La matrioska più grande del mondo è stata costruita nel 2003 negli Stati Uniti ed è composta da 51 pezzi.

Fonte <https://it.wikipedia.org/wiki/Matrioska>



Quesito proposto dalla Prof. Cristina Cipolla, LS Montessori, Roma

1. Sapendo che la bambola madre è alta 7 cm e la seconda 5 cm, costruire un modello che descriva le altezze delle bamboline. Sulla base del modello calcolare l'altezza della bambolina seme.

2. E' possibile costruire un modello che descriva le altezze della bamboline di una qualsiasi matrioska?

#### Svolgimento.

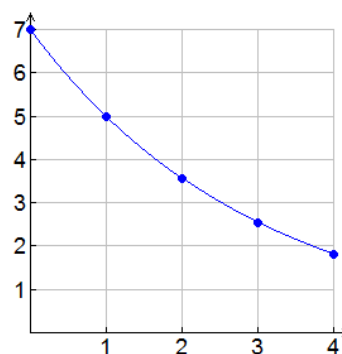
1. Assunta una relazione di proporzionalità diretta fra l'altezza di una bambolina e di quella contenuta, si ottiene il seguente modello iterativo che descrive le altezze delle bamboline

$$\begin{cases} h_0 = 7 \\ h_{n+1} = \frac{5}{7} h_n \end{cases} \Rightarrow h_n = h_0 \left( \frac{5}{7} \right)^n \quad n = 0, 1, \dots, 4$$

ove  $h_n$   $n = 0, \dots, 4$  sono le altezze delle cinque bamboline.

Di conseguenza, la bambolina seme è alta circa 1,82 cm

$$h_4 = 7 \left( \frac{5}{7} \right)^4 \cong 1,82$$



2. il modello costruito nel punto 1 si presta a descrivere le altezze delle bamboline di una qualsiasi matrioska

$$\begin{cases} h_0 \text{ start} \\ h_{n+1} = k h_n \end{cases} \Rightarrow h_n = h_0 k^n \quad n = 0, 1, 2, \dots, \bar{n}$$

ove  $k$  denota la costante di riduzione della bambolina contenuta rispetto la contenente.

## E' emergenza moscerini al lago Trasimeno

Dopo la stagione turistica dello scorso anno "funestata" dai fastidiosi chironomi (moscerini, ndr) che hanno invaso il Trasimeno, anche in vista dell'estate si torna sulla questione per cercare di risolvere un problema che rischia di compromettere il turismo nella nostra regione, già gravato dopo la cattiva informazione del sisma." 8.3.2017  
<http://www.perugiatoday.it/politica/emergenza-insetti-al-lago-trasimeno-interrogazione-leonaelli-pd.html>

Il *moscerino* è un piccolo insetto appartenente all'ordine dei Ditteri, di dimensioni dell'ordine di pochi mm. <https://it.wikipedia.org/wiki/Moscerino>

Anche se sono innocui, pochi insetti sono tanto fastidiosi quanto i moscerini. In estate, specialmente se il clima è caldo e umido, la popolazione di moscerini in un'area lacustre ha uno sviluppo elevato.



**Stabilire dopo quante settimane la popolazione sarà centuplicata, assunto il modello di crescita seguente**

$$m(t) = 10 \cdot m(0) \cdot e^{0,8t} \quad t \geq 0 \quad \text{ove il tempo } t \text{ è misurato in settimane.}$$

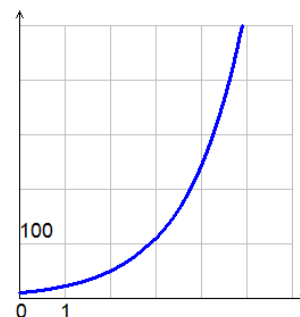
**Svolgimento.** Si tratta di risolvere l'equazione *esponenziale*

$$m(t) = 100 m(0) \Leftrightarrow 10 \cdot \cancel{m(0)} e^{0,8t} = 100 \cancel{m(0)} \Rightarrow e^{0,8t} = 10$$

Da cui, passando al logaritmo (funzione inversa dell'esponenziale) si ottiene

$$0,8t = \log 10 \Rightarrow t = \frac{\log 10}{0,8} \cong 2,87$$

approssimato a 3 settimane.



## Foreste vergini

Fra il 2000 e il 2013, il mondo ha perso il 7,2% delle sue foreste vergini: ne sono spariti 919.000 chilometri quadrati, un'area grande come il Venezuela.

E la deforestazione accelera: fra il 2011 e il 2013 è stata il triplo che nel periodo 2001-2003.

I ricercatori dell'Università del Maryland, negli Stati Uniti, hanno coordinato il lavoro di colleghi in Europa, Nord America e Asia, confrontando le foto dei satelliti nel periodo preso in considerazione. Il risultato del loro lavoro è stato pubblicato sulla rivista «Science Advances». Le foreste vergini, per lo studio, sono quelle di almeno 500 km quadrati che non presentano segni di attività umana. Hanno un ruolo fondamentale nell'assorbire anidride carbonica (riducendo l'effetto serra), proteggere la biodiversità e regolare il flusso dell'acqua negli ecosistemi.



Fonte: Corriere.it articolo del 27/01/2017 di Silvia Morosi

Quesito proposto dalla Prof. Clara Petrone, IC Baronissi (SA)

**1. Costruire un modello che descriva la deforestazione, assunto un andamento di tipo esponenziale.**

**2. Sulla base del modello, prevedere l'estensione delle foreste vergini nel 2020.**

Consideriamo il periodo 2000-2013 e assumiamo il 2000 come anno zero.

Secondo l'articolo il 7,2% dell'estensione delle foreste vergini ammonta a  $919.000 \text{ km}^2$  ;

pertanto la loro estensione nell'anno 2000 era

$$\frac{919}{7,2} \cdot 10^3 \cdot 100 = 12.764.000 \text{ km}^2$$

Indicata con  $k$  la percentuale annuale di deforestazione (periodo 2000-2013), l'evoluzione della superficie di foreste vergini è rappresentata dal processo iterativo seguente:

$S_0$  estensione in  $\text{km}^2$  delle piantagioni nell'anno zero (2000)

$$S_n = (1-k)S_{n-1} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Da cui la formula chiusa

$$S_n = (1-k)^n S_0 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Tenuto conto dei dati, si ha

$$(1-k)^{13} = 1 - 0,072 \Rightarrow k = 0,0057$$

da cui

$$S_n = 12.764.000 \cdot (1 - 0,0057)^n \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

**2. Sulla base del modello, prevedere l'estensione delle foreste vergini nel 2020.**

Per valutare l'estensione delle foreste vergini presente nel 2020 è sufficiente valutare

$$S_{20} = 12.764.000 \cdot (1 - 0,0057)^{20} \cong 12.764.000 \cdot 0,892 \cong 11.385.500 \text{ km}^2$$

## Innaffiamo il prato

Per innaffiare il prato del giardino, Luca ha acquistato otto irrigatori statici a scomparsa "IGT 570 Plus". Ciascun irrigatore ha una portata di 7,9 litri al minuto. Luca ha programmato l'accensione giornaliera dalle ore 6:00 alle ore 6:15 e dalle ore 23:00 alle ore 23:15 nel periodo 1 maggio - 31 agosto.



### 1) Determinare una funzione che descriva l'attività di ciascun irrigatore in funzione del tempo (legge e grafico).

Luca è preoccupato della spesa aggiuntiva che gli comporterà l'annaffiatura.

Consulta la sua bolletta (Umbria Acque) ove è riportato il suo consumo attuale annuo stimato [110 metri cubi] ed il tariffario (vedi tabella)

Quesito proposto dalla Professoressa Marina Venturi, Liceo Scientifico "Galilei", Perugia

tariffa per uso domestico												
quota fissa	quota variabile per:											
€/anno 47,75	fasce di consumo		Servizio Idrico Integrato (€/mc)	acquedotto			fognatura			depurazione		
	da mc	a mc		QV	UI1	Totale	QV	UI1	Totale	QV	UI1	Totale
	0	70	1,2033	0,2508	0,0040	0,2548	0,2365	0,0040	0,2405	0,7040	0,0040	0,7080
	70,01	150	1,9611	1,0086	0,0040	1,0126	0,2365	0,0040	0,2405	0,7040	0,0040	0,7080
	150,01	240	3,5544	2,1518	0,0040	2,1558	0,3982	0,0040	0,4022	0,9924	0,0040	0,9964
	oltre 240		4,6728	2,9187	0,0040	2,9227	0,4051	0,0040	0,4091	1,3370	0,0040	1,3410

### 2) Luca è in difficoltà; sei in grado di aiutarlo valutando l'aumento (annuo) che si troverà in bolletta?

Svolgimento. 1) Limitandoci ai quattro mesi di accensione, la funzione richiesta è periodica di periodo 24 ore.

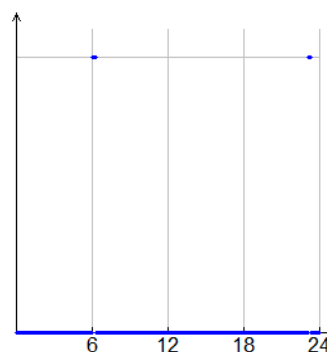
La sua espressione è

$$a(t) = \begin{cases} 0 & kT \leq t < 6 + kT \\ 1 & 6 + kT \leq t < 6,25 + kT \\ 0 & 6,25 + kT \leq t < 23 + kT \\ 1 & 23 + kT \leq t < 23,25 + kT \\ 0 & 23,25 + kT \leq t < 24 + kT \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 123 \cdot 24 = 2952$$

ove  $t$  è il tempo (ore),  $T$  è il periodo e  $k \in \{0, 1, 2, \dots, 123\}$ .

Nell'immagine a lato il grafico del primo periodo ( $k = 0$ ).

Osserviamo che 15 min equivalgono a 0,25 h.



### 2) Iniziamo calcolando il volume complessivo di acqua che comporta l'annaffiatura:

portata irrigatore × numero minuti accensione giornaliera × numero giorni × numero irrigatori

$$V = 7,9 \cdot 30 \cdot 123 \cdot 8 = 233208 \ell \cong 23,32 m^3$$

Consultando la tabella, scopre con piacere, che l'aumento di consumo non comporta il passaggio alla terza fascia. Pertanto il suo costo aggiuntivo graverà esclusivamente sulla seconda fascia; precisamente si avrà:

$$\text{Spesa aggiuntiva} = 23,32 \cdot 1,9611 \cong 45,73 \text{ €}$$

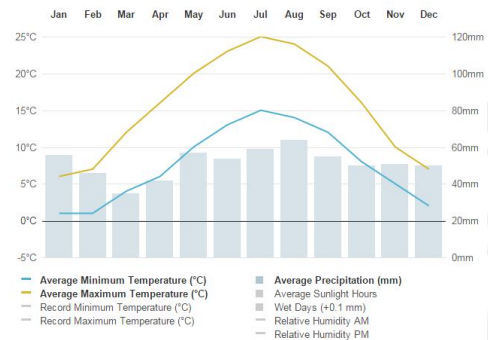
## Che caldo che fa ...

Sulla base dell'immagine a lato, rispondere al quesito seguente.  
Fonte: <http://www.bbc.com/weather/>

Individuare una funzione goniometrica che descrive la temperatura (media) massima di Parigi, stimando ampiezza e periodo dell'onda.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI  
DI PERUGIA

Average Conditions



Parigi

Dall'immagine deduciamo i seguenti dati sulla temperatura (media) massima:

valore minimo:  $6^{\circ}\text{C}$

valore massimo:  $25^{\circ}\text{C}$

periodo temporale 12 mesi.

Per rappresentare l'andamento della temperatura (media) massima mensile a Parigi possiamo adottare un'onda sinusoidale, ovvero una funzione del tipo

$$f(t) = a + A \sin(\omega t) \quad \text{ove il tempo } t \text{ è misurato in mesi.}$$

Tenendo presente i dati, deve risultare

$$6 = f(0) = a \quad \max f = a + A = 25$$

da cui

$$a = 6 \quad A = 19$$

In forza della definizione di periodo, posto  $T = 24$  mesi il periodo dell'onda, risulta

$$\sin(\omega t) = \sin[\omega(t+T)] \quad \text{per ogni } t$$

da cui, per la periodicità della funzione seno, deve essere

$$\omega T = 2\pi \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{12}$$