# Matematica&Realtà

## Percorso J

# Proporzionalità e linearità nella vita reale

## Unità didattica J1- proporzioni


**a cura di**

**Primo Brandi – Anna Salvadori**

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università degli Studi di Perugia

Matematica&Realtà

## Percorso J

# Proporzionalità e linearità nella vita reale

## Unità didattica J1- proporzioni

**A cura di**
**Primo Brandi – Anna Salvadori**

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università degli Studi di Perugia

### Introduzione

Il percorso J propone una rivisitazione di due argomenti classici della formazione scolastica, la proporzionalità e la linearità, in un'ottica diversa basata sull'interazione fra mondo reale e matematica.

L'argomento mira a far emergere un approccio unificante in *continuità* fra scuola superiore di I grado e di II grado.

Questi tema si inserisce in un processo più articolato che ha lo scopo di illustrare le potenzialità della *rappresentazione mediante funzioni elementari* per la comprensione e la soluzione di problemi del quotidiano [1-2]).

In questa prima unità didattica affrontiamo lo studio della **proporzionalità**.

I bozzetti umoristici sono di Luigi Aluffi

### Referenze

Riferimenti strettamente collegati

[1] P.Brandi-A.Salvadori, Matematica&Realtà, Introduzione alla modellizzazione matematica con strumenti elementari, Università degli Studi di Perugia (2010)
[2] P.Brandi-A.Salvadori, Prima di iniziare (Conoscenze e competenze Matematiche di base per l'Università) 2009-10
[3] P.Brandi-A.Salvadori, Progetto RealM@t – Innovadidattica MIUR, 2009
[4] P.Brandi-A.Salvadori, Modelli matematici elementari, Ed. B.Mondadori (2004)

I Dossier M&R di Alice&Bob con contributi delle varie Unità Locali M&R

*Dalle tabelle ai grafici* , Alice e Bob, 3 (2007) 21-28
*Primi modelli lineari.* Alice e Bob, 4 (2007) 21-28

I progetti di approfondimento svolti dai ragazzi partecipanti ai Laboratori M&R con la guida dei loro Tutor e presentati al convegno annuale Esperienze a confronto.

AA.VV. Matematica&Realtà, Esperienze a confronto DVD (aggiornamento 2010)

## Dal mondo reale al mondo matematico - Introduzione alla proporzionalità

Prendiamo spunto da alcune esperienze della *vita reale* per introdurre il concetto di *proporzionalità diretta*.

Il primo suggerimento è tratto da una gara di matematica.

### J1.9 Acqua e ghiaccio

**L'acqua, congelando, aumenta di 1/11 il proprio volume.**
**Di quanto diminuisce il volume del ghiaccio quando, fondendo, ritorna acqua?**

**a) 1/10** **b) 1/11** **c) 1/12** **d) 1/13** **e) 1/14**

[Fonte: Gare di Matematica Città di Terni, 2003]

**Soluzione approccio numerico**

La relazione fra il volume dello stato liquido e il volume dello stato solido dell'acqua è sintetizzata nella tabella seguente

Grandezze proporzionali

| volume del liquido | volume del solido |
|---|---|
| $1$ | $1+\frac{1}{11}$ |
| *volume incognito* | $1$ |

Si tratta pertanto di determinare il quarto proporzionale seguente

$$1:\left(1+\frac{1}{11}\right)=volume\,incognito:1$$

da cui

$$volume\,incognito=\frac{1}{1+\frac{1}{11}}=\frac{11}{12}$$

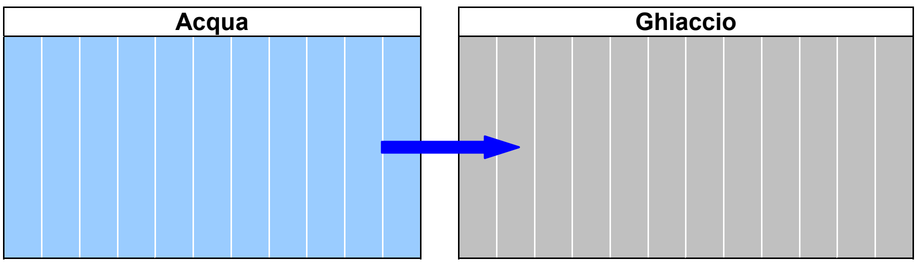
In definitiva un volume unitario di ghiaccio, fondendo, produce un volume di acqua pari a 11/12 del volume, **riducendosi pertanto di** 1/12.

Chiave della soluzione

Proporzionalità diretta.

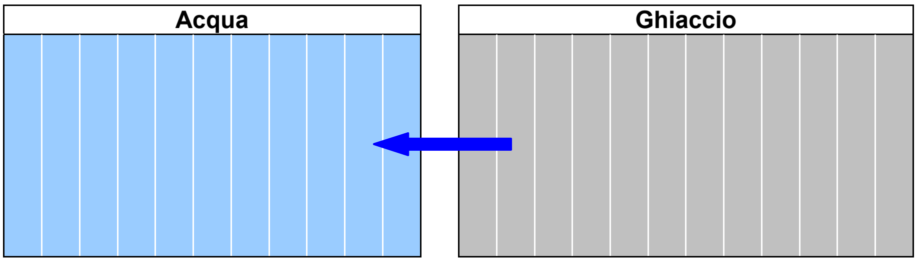
**Soluzione approccio geometrico**

Adottando una rappresentazione grafica, si giunge immediatamente allo stesso risultato:




Da acqua a ghiaccio

$$1=\frac{11}{11}\quad\Rightarrow\quad 1+\frac{11}{11}=\frac{12}{11}$$




Da ghiaccio ad acqua

$$1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12} \quad \Leftarrow \quad 1=\frac{12}{12}$$

In varie situazioni del quotidiano è importante riconoscere “a pelle” se due classi di grandezze sono in proporzione.

## J1.1 Velocità di lettura

**Charles Osgood è un famoso conduttore radio-televisivo statunitense.**
**Il suo programma *The Osgood file* viene trasmesso da CBS Radio Network tutti i giorni dal 1971!**
**Alla televisione conduce CBS *News Sunday Morning* dal 1994.**

**E’ famoso anche per il sistema adottato per pronunciare gli anni dal 2001: invece del convenzionale “two thousand one” egli ha scelto il più veloce “twenty oh one”.**

**Osgood sostiene di impiegare circa 1 minuto a leggere 15 righe (battute a interlinea doppia).**

**a) Quante righe riesce a leggere in 30 secondi?**

**b) Siamo in grado di valutare quanto tempo impiega a leggere 9 righe?**

**Quesito a)**

La risposta al primo quesito “a pelle” è ovviamente 7 righe e mezzo!
Infatti, se Charles in 1 minuto (pari a 60 secondi) legge 15 righe, in metà tempo leggerà la metà delle righe.

Traduciamo questa proposizione *in formule*:

*denotato* con $r$ il numero di righe che Charles legge in 30 secondi, si deve avere

$$\frac{r}{15}=\frac{30}{60} \quad \Rightarrow \quad \frac{r}{15}=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad r=7.5$$

Grandezze direttamente proporzionali

In altri termini, abbiamo *intuito* una relazione di (diretta) proporzionalità fra le grandezze in gioco: numero di righe e tempo di lettura

| **Righe lette** (numero) | **Tempo impiegato** (secondi) |
|---|---|
| 15 | 60 |
| 7.5 | 30 |
| $r_1$ | $t_1$ |
| $r_2$ | $t_2$ |

che si esprime attraverso l’*uguaglianza fra i rapporti di grandezze omogenee*

Uguaglianza di rapporti fra grandezze omogenee

$$\frac{r_1}{r_2}=\frac{t_1}{t_2}$$

cioè mediante la *proporzione*

proporzione

$$\boxed{r_1 : r_2 = t_1 : t_2}$$

**Quesito b)**
quarto proporzionale

Rispondiamo al quesito utilizzando la relazione di proporzionalità, cioè calcolando il *quarto proporzionale* incognito $t$

| **Righe lette** (numero) | **Tempo impiegato** (secondi) |
|---|---|
| 15 | 60 |
| 9 | t |

$$15:9=60:t \quad \Rightarrow \quad t=\frac{9\times 60}{15}=36$$

Risposta al quesito

In conclusione, Charles legge 9 righe in 36 secondi.

**Ancora sul quesito b)**

Proponiamo un secondo metodo per rispondere al quesito, ottenuto attraverso una *diversa lettura* della relazione di proporzionalità.

| **Righe lette** (numero) | **Tempo impiegato** (secondi) |
|---|---|
| $r_1$ | $t_1$ |
| $r_2$ | $t_2$ |

Osserviamo che la proporzione

(1.1) $$r_1:r_2=t_1:t_2$$

si può **scrivere equivalentemente** (proprietà del *commutare*)

Invarianza dei rapporti fra grandezze corrispondenti

(1.2) $$r_1:t_1=r_2:t_2=k$$

In altri termini, l'**uguaglianza dei rapporti fra grandezze omogenee** (*rapporti in colonna*) equivale all'**invarianza dei rapporti fra grandezze corrispondenti** (*rapporti in riga*).

Costante di proporzionalità

La costante $k$ è detta costante di proporzionalità; nel nostro caso risulta

$$k=1/4$$

Possiamo affermare che fra numero di righe lette $r$ e tempo di lettura impiegato $t$ sussite la relazione

$$r:t=1:4$$

da cui si deduce

$$t=4r \quad \text{o equivalentemente} \quad r=t/4$$

In altri termini

- il tempo di lettura è pari a 4 volte il numero delle righe lette
- le righe sono un quarto del tempo di lettura

## J1.2 Frantoi aperti

**In novembre si tiene in Umbria e in altre regioni italiane la manifestazione *Frantoi aperti* che invita alla visita dei frantoi e all'acquisto di olio genuino appena prodotto.**
**La raccolta 2008 è stata abbondante e il prezzo dell'olio è sceso fra 7,00 e 8,00 euro/kg.**
**I formati standard dei contenitori (lattine) sono: 500 g, 750 g,** $1\ kg$ **,** $5\ kg$ **,** $10\ kg$ **.**
**Scriviamo una tabella dei prezzi per facilitare gli acquirenti nella scelta.**

Tabella prezzi

| **Quantità** ( $kg$ ) | **Prezzo minimo €** | **Prezzo massimo €** |
|---|---|---|
| 1/2 | 3,50 | 4,00 |
| 3/4 | 5,25 | 6,00 |
| 1 | 7,00 | 8,00 |
| 5 | 35,00 | 40,00 |
| 10 | 70,00 | 80,00 |

Grandezze direttamente proporzionali

E' facile verificare che le grandezze delle tre colonne sono direttamente proporzionali, infatti il *rapporto delle quantità* è pari al *rapporto fra i prezzi* (minimi o massimi)

$$q_1 : q_2 = p_1 : p_2$$

Costante di proporzionalità

Per individuare le costanti di proporzionalità

$$p_{min} : q = k_{\min} \quad \text{e} \quad p_{\max} : q = k_{max}$$

è sufficiente leggere la terza riga della tabella in cui sono riportai i prezzi dell'unità (1 kg di olio) e si scopre che

$$k_{\min} = 3,5 \quad \text{e} \quad k_{\max} = 4$$

Proviamo ora a *leggere* e interpretare un modello già pronto.

### J1.8 Indice di massa corporea

**Nella campagna per la prevenzione delle malattie dovute al sovrappeso, è stato recentemente individuato un metodo rapido e alla portata di tutti per *misurare l'obesità*. Si tratta del *body mass index* (*BMI*) che si ottiene come rapporto fra il peso (in chilogrammi) di un individuo e il quadrato della sua altezza (in metri)**[1]

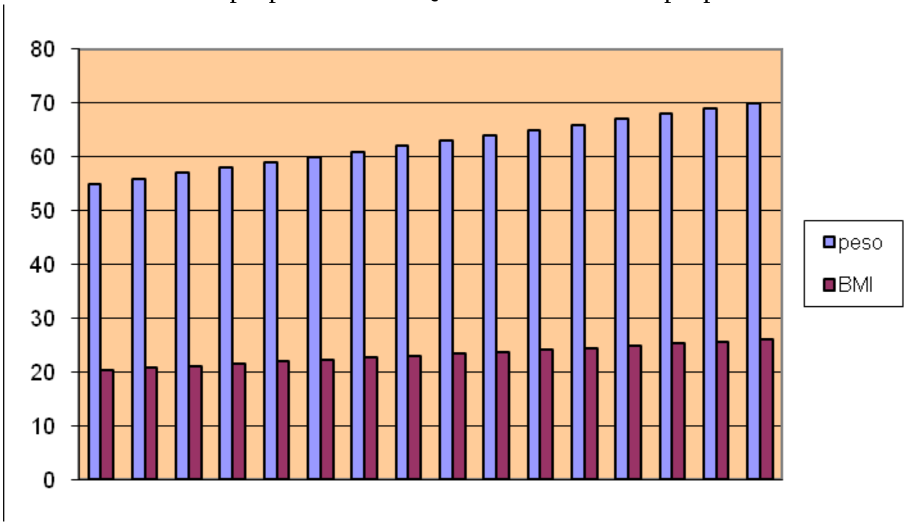
$$BMI = \frac{peso}{(altezza)^2}$$

**a) Calcola il tuo BMI attuale.**

**b) Modella come potrebbe variare il tuo BMI in funzione del peso.**

**Risultato** Riportando i dati in una tabella a due entrate (peso, BMI) si ottengono due classi di grandezze direttamente proporzionali. Qual è la costante di proporzionalità?

Un esempio



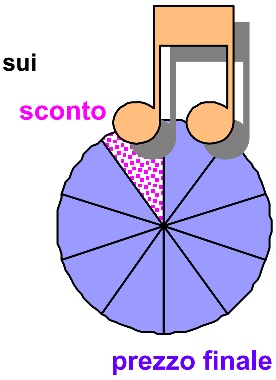

[1] L'indice *BMI* è quindi misurato in $kg/m^2$. La soglia normalità-sovrappeso è 25 per gli uomini e 24 per le donne; mentre quella soprappeso-obesità è 30 per gli uomini e 28,7 per le donne.

## Proporzioni e percentuali

Le percentuali sono un caso particolare di proporzione, sarebbe opportuno presentare congiuntamente i due concetti.
Proponiamo alcuni esempi tratti dal quotidiano.

### J1.12 Sconti eccezionali

**A scopo promozionale il negozio NUOVA Musica offre uno sconto del 10% sui**




Prendiamo in esame la prima e la terza colonna.
Il prezzo finale si ottiene sottraendo lo sconto al prezzo iniziale, poiché lo sconto è pari allo 0.1 del prezzo iniziale, si ha

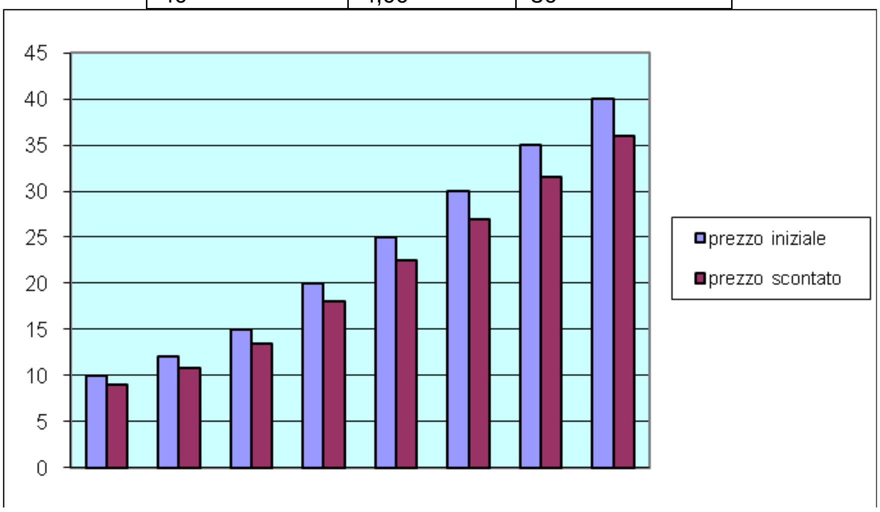
confronto prezzo pieno e scontato

$$\text{prezzo finale} = 0.9 \text{ prezzo iniziale}$$

Di conseguenza anche le grandezze prezzo pieno e prezzo scontato sono direttamente proporzionali, con costante di proporzionalità pari a 0.9.

| | | |
|---|---|---|
| 30 | 3,00 | 27 |
| 35 | 3,50 | 31,5 |
| 40 | 4,00 | 36 |

Rappresent-zione grafica dei dati




Analizzando la tabella e l'istogramma possiamo fare alcune osservazioni.

I dati delle tre colonne sono *crescenti*, cioè al crescere del prezzo pieno, cresce sia lo sconto che il prezzo scontato

Confronto prezzo pieno e sconto

Lo sconto $s$ è pari al $10\%$ del prezzo pieno $p$, cioè

$$s = 0.1 \cdot p$$

Rapporto costante

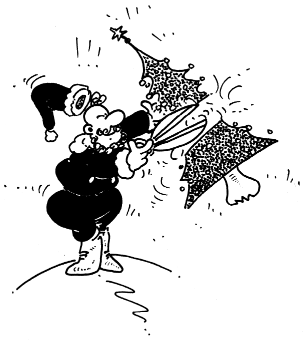
i valori della seconda colonna sono pari ai valori corrispondenti della prima colonna moltiplicati per il fattore $0.1$
In altri termini, le grandezze delle prime due colonne sono *direttamente proporzionali*, con costante di proporzionalità pari a 0.1

## J1.14 Offerte Natalizie

**Un venditore di scarpe prima di Natale aumenta i prezzi del 20%, finite le feste vende tutta la merce con uno sconto del 20%.**
**Un paio di scarpe dal costo iniziale di 80 € a gennaio vengono vendute a 80 €**

**Vero □ Falso □**

[Fonte: Gara città di Terni, 2004]



**Svolgimento** Le informazioni a nostra disposizione si possono riassumere nella tabella

| Prezzi | | |
|---|---|---|
| **Iniziale** | **Nata e** | **Gennaio** |
| 100 | 120 | |
| | 100 | 80 |
| 80 | | ???? |

Osserviamo, innanzi tutto, che le grandezze "prezzo iniziale" e "prezzo a Natale" costituiscono due classi di *grandezze proporzionali*, con costante di proporzionalità è: $120/100 = 1,2$

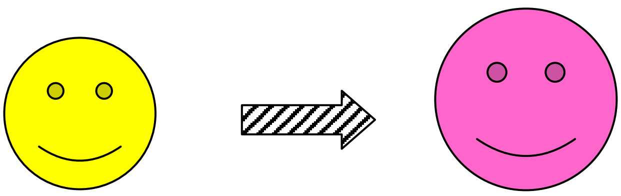
Grandezze Proporzionali

**Approccio numerico**

| Prezzi | | |
|---|---|---|
| **Iniziale** | **Natale** | **Gennaio** |
| 100 | 120 | |
| | 100 | 80 |
| 80 | | ???? |

Con un'immagine espressiva, possiamo affermare che i prezzi delle scarpe a Natale subiscono uno *zoom-out* di 1.2

**Approccio geometrico**
Zoom-out



Analogamente, le grandezze "prezzo a Natale" e prezzo a Gennaio" costituiscono due classi di grandezze proporzionali, con costante di proporzionalità: $80/100 = 0,8$

Grandezze Proporzionali

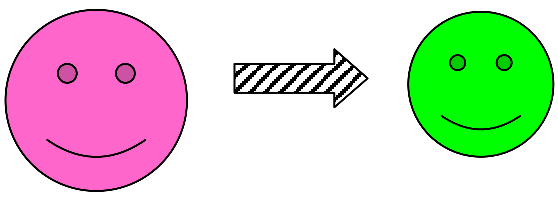
**Approccio numerico**

| Prezzi | | |
|---|---|---|
| **Iniziale** | **Natale** | **Gennaio** |
| 100 | 120 | |
| | 100 | 80 |
| 80 | | ???? |

Sempre adottando un'immagine, i prezzi delle scarpe dopo Natale subiscono uno zoom-in di 0.8

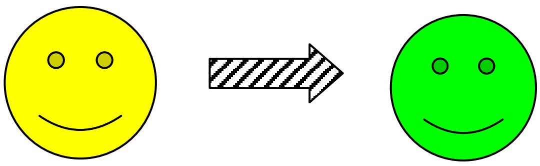
**Approccio geometrico**

Zoom-in



Combinando le due trasformazioni si ha quindi:

Zoom-out ⊕ zoom-in



Confronto grafico

Il confronto diretto consente di verificare che il prezzo a gennaio è inferiore (anche se di poco) di quello iniziale (vedi immagine a lato).

Precisamente si ha:

Confronto numerico

$$x \quad \to \quad 1.2\cdot x \quad \to \quad 0.8(1.2\cdot x) = 0.8\cdot 1.2\cdot x = 0.96\cdot x$$

cioè il prezzo a gennaio è il 96 % del prezzo iniziale.

## Proporzioni ed equivalenze

Le equivalenze fra due sistemi di misura sono proporzioni. Proponiamo alcuni esempi.

### J1.18 Sistemi di misura equivalenti

**Consideriamo, ad esempio, la misura delle lunghezze nel sistema di misura internazionale e nel sistema inglese. Nel primo sistema l'unità di misura è il *metro*, nel secondo lo *yard* (equivalente a $0,914\,m$). Le misure di lunghezza (di grandezze arbitrarie) rispetto alle due unità di misura costituiscono due classi direttamente proporzionali. La costante di proporzionalità fra le classi è il fattore di conversione fra le unità di misura.**

| metri | yards |
|---|---|
| 0,914 | 1 |
| 1 | 1,094 |
| 1,828 | 2 |
| 2 | 2,188 |
| 2,742 | 3 |
| 3 | 3,282 |

### J1.19 Il prezzo dell'olio

**Un produttore vende l'olio extra vergine di oliva a $7\,€/kg$, mentre un suo concorrente lo vende a $6,5\,€/\ell$. Quale dei due prezzi è più conveniente?**

**Svolgimento** Per paragonare i due prezzi, è necessario confrontare la misura di capacità (litri $\ell$ ) con il peso (chilogrammi $kg$ ).

A questo proposito, osserviamo che

$1\,\ell$ **di olio pesa circa** $920\,g$ **, cioè** $0,92\,kg$

in altri termini, il **peso specifico** dell'olio di oliva è $0,92$ .

Siamo così in grado di compilare la tabella

| Primo produttore | | Secondo produttore | |
|---|---|---|---|
| Quantità ( $kg$ ) | Costo (€) | Quantità ( $\ell$ ) | Costo (€) |
| 0,92 | ? | 1 | 6,50 |
| 1 | 7,00 | | |

In virtù della proporzionalità diretta fra la prima e la seconda colonna, operando la ricerca del quarto proporzionale, si ottiene

$$0,92:1 = x:7,00 \quad \Rightarrow \quad x = 6,44$$

Tenuto conto del valore approssimato del peso specifico dell'olio, possiamo ritenere i prezzi pressoché identici.

## J1.20 Il ritardatario

**Nella classe di Luca molti ragazzi hanno preso la brutta abitudine di entrare in classe in ritardo.**
**L'insegnante propone un patto per i 25 giorni di scuola che mancano alle vacanze di Pasqua: alla fine del periodo stabilito darà ad ogni alunno 3 caramelle per ogni giorno in cui è arrivato puntuale e ne chiederà 12 per ogni giorno di ritardo.**
**Luca, che è stato presente tutti e 25 i giorni, esclama: "non ho ricevuto né pagato caramelle"   Quanti giorni è arrivato in ritardo?**
[Fonte: Gare di Matematica Città di Terni, 2005]

Proponiamo **tre diversi approcci** alla soluzione del quesito, proposti in collaborazione con il gruppo di ricerca didattica dell' IC De Filis (TR) , coordinato da C. Riccardi.

**Prima soluzione**

Come al solito, traduciamo le informazioni a nostra disposizione in tabelle

| Giorni di ritardo | penalità |
|---|---|
| 1 | 12 |
| 2 | 24 |
| 3 | 36 |
| 4 | 48 |
| ⋮ | ⋮ |
| $r$ | $12r$ |

| Giorni di puntualità | premio |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 2 | 6 |
| 3 | 9 |
| 4 | 12 |
| ⋮ | ⋮ |
| $p$ | $3p$ |

equilibrio

Poiché Luca non ha ricevuto, né pagato caramelle, deve esserci **equilibrio fra premio e penalità**:

$$3p = 12r$$

Da questa relazione si deduce la proporzione

proporzione

$$\frac{p}{r} = \frac{12}{3} \qquad \Leftrightarrow \qquad p : r = 12 : 3$$

Come si vede, compaiono due incognite.
I dati a nostra disposizione forniscono però la loro somma:

$$p + r = 25$$

Proprietà del comporre

Così, applicando la proprietà del comporre, si deduce

$$(p + r) : r = (12 + 3) : 3 \qquad\qquad 25 : r = 15 : 3$$

$$r = \frac{25 \cdot 3}{15} = 5 \qquad\qquad p = 20$$

Conclusione

In definitiva il rapporto $\frac{12}{3}$ fra la penalità e il premio è pari al **rapporto inverso** fra i giorni di ritardo e i giorni di puntualità.

Chiave della soluzione

Equilibrio fra momenti (principio della leva).

**Seconda soluzione**

Riportiamo i dati in un'unica tabella, avendo l'accortezza di osservare che il totale dei giorni è 25 e quindi ogni giorno di ritardo, ne diminuisce uno di puntualità.

| **Giorni di ritardo** | **Giorni di puntualità** | **penalità** | **premio** |
|---|---|---|---|
| 0 | 25 | 0 | 75 |
| 1 | 24 | 12 | 72 |
| 2 | 23 | 24 | 69 |
| 3 | 22 | 36 | 66 |
| 4 | 21 | 48 | 63 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 25 | 0 | 310 | 0 |

approccio grafico

Riportando i dati delle due ultime colonne in un grafico, si ottiene l'immagine seguente

da cui si evince che il numero di caramelle ricevute in premio sarà uguale a quello delle penalità ricevute, se (e solo se) Luca accumulerà 5 giorni di ritardo.

**Terza soluzione**

Proviamo a *scrivere* le regole che legano il ritardo e la puntualità al premio e alla penalità di caramelle.
Osserviamo innanzi tutto che i giorni di puntualità $p$ e quelli di ritardo $r$ sono legati dalla relazione

giorni di puntualità e ritardo

$$p + r = 25 \quad \Leftrightarrow \quad p = 25 - r$$

La regola della premialità e quella della penalità sono rispettivamente

caramelle premio e penalità

$$\textit{premialità}: \; 3 \cdot (25 - r) \qquad \textit{penalità}: \; 12 \cdot r$$

Se Luca alla fine dei 25 giorni non ha caramelle, vuol dire che la caramelle avute in premio sono pari a quelle rese per i ritardi accumulati, in formula si ha quindi

$$3(25 - r) = 12r$$

Risolvendo l'equazione (nell'incognita $r$)

$$3(25 - r) = 12r \quad \Leftrightarrow \quad 3r + 12r = 75 \quad \Leftrightarrow \quad 15r = 75 \quad \Leftrightarrow \quad r = 5$$

si ottiene la soluzione: Luca ha effettuato *solo* 5 giorni di ritardo (su 25 giorni).

**Approfondi-mento**

Con 5 giorni di ritardo (sui 25 giorni disponibili) Luca ha *bilanciato* premio e penalità.
L'insegnante ha fissato una regola abbastanza indulgente. Come si dovrebbe cambiare tale regola affinché Luca, con 5 giorni di ritardo su 25, debba pagare un pegno in caramelle?

## Dal mondo reale al mondo matematico – Proporzionalità inversa

Ancora una volta gli stimoli provenienti dal mondo reale, ci inducono ad una modifica del modello.

Proponiamo una *quesito intrigante*.

### J1.21 Il ciclista

**Un ciclista scala una montagna alla media di $20\ km/h$; giunto in cima, gira la bicicletta e riscende a valle (seguendo la stessa strada) ad una media di $60\ km/h$.**

**Qual è la velocità media complessiva del ciclista?**

[Fonte: Enigmi www.chiesi.net/home/ita/giochi.html]

**Risposta errata**

La risposta *più frequente* al quesito è la media aritmetica ovvero

$$\frac{20+60}{2}=40 \quad km/h.$$

In tal modo assumiamo implicitamente di essere in presenza di un fenomeno lineare.

**Soluzione esatta**

In realtà dalla relazione $velocità = spazio/tempo$, si ottiene

$$spazio = velocità\ per\ tempo \quad \text{cioè} \quad s = v\,t.$$

A parità di spazio quindi (la spazio di scalata coincide con quello di discesa), le velocità sono *inversamente proporzionali* ai rispettivi tempi.

Denotati con $t_s$ e $t_d$ i tempi di salita e discesa, rispettivamente, la situazione può essere sintetizzata nella tabella a lato

| velocità *v* | tempo *t* |
|---|---|
| 20 | $t_s$ |
| 60 | $t_d$ |

Proporzionalità inversa

Dalla tabella, in forza della inversa proporzionalità, si deduce

$$\frac{t_s}{t_d}=\frac{60}{20}=3$$

da cui

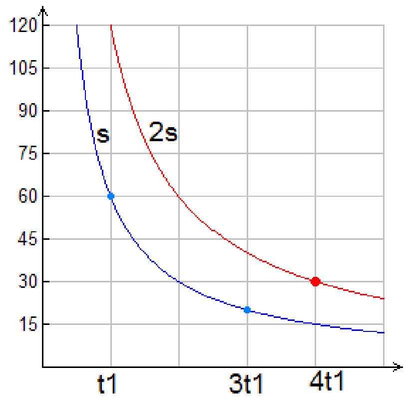
$$t_s = 3t_d$$

ovvero **il tempo di salita è il triplo del tempo di discesa**.

Conclusione

Per determinare la velocità media dobbiamo prendere in considerazione gli spazi percorsi

| velocità *v* | tempo *t* | spazio *s* |
|---|---|---|
| 20 | $3t_d$ | $60t_d$ |
| 60 | $t_d$ | $60t_d$ |




La **velocità media** è allora

$$v_m = \frac{spazio\,totale}{tempo\,totale} = \frac{120t_d}{3t_d + t_d} = \frac{120t_d}{4t_d} = 30\ km/h$$

Chiave della soluzione

Proporzionalità inversa.

Proponiamo altri esempi di grandezze inversamente proporzionali tratto dall'esperienza quotidiana.

### J1.22 Tinteggiatura del Dipartimento di Matematica e Informatica

**Recentemente si è reso necessario ritinteggiare l'interno del Dipartimento di Matematica e Informatica. La superficie da tinteggiare ammonta a circa 30500 mq.**
**Alla gara di appalto, resa pubblica dal Dipartimento, hanno partecipato 3 ditte che propongono di impiegare rispettivamente 8, 15 e 17 operai.**
**Tenuto conto che la superficie media tinteggiata in una giornata-uomo è di circa 120 mq, proviamo a stimare la durata del lavoro, a seconda della ditta che eseguirà i lavori. Il numero complessivo di giornate-uomo necessarie per il lavoro di tinteggiatura è 254 circa. Il tempo corrispondente è riportato in tabella.**

| operai impiegati | durata del lavoro (giorni) | giornate-uomo totali |
|---|---|---|
| 8 | 32 | 256 |
| 15 | 17 | 255 |
| 17 | 15 | 255 |

Il numero degli operai impiegati e la durata del lavoro in giorni costituiscono due classi di grandezze inversamente proporzionali.

### J1.8' Indice di massa corporea ([1])

**Dalla definizione si deduce immediatamente che l'indice *BMI* (misurato in $kg/m^2$ )**

$$BMI = \frac{peso}{(altezza)^2}$$

**è direttamente proporzionale al peso ed inversamente proporzionale al quadrato dell'altezza.**
**Quali sono i coefficienti di proporzionalità?**

## QUESITI E MODELLI

### Diffusione Skype

Secondo le stime di TeleGeography nel 2008 sono state effettuate chiamate internazionali per 384 miliardi di minuti con un incremento del 12% rispetto all'anno precedente. Secondo l'agenzia di stampa di fama mondiale Reuters , l'8% di tale traffico è avvenuto tramite Skype, che ha conseguito un incremento del 41% rispetto all'anno precedente.
[Fonte: *Reuters Italia*, 24 marzo 2009]

Quanti minuti di traffico internazionale sono transitati via Skype nel 2007?

### Adozioni internazionali

La linea spezzata della figura seguente descrive l'andamento delle domande di adozione internazionale in Italia nel periodo dal 2000 al I semestre del 2007.
[Fonte: La Repubblica, 20.11.2007 ]
Il grafico non è corretto, individuare l'errore e fornire quello esatto.


### Altalena a Piazza Affari

Un "esperto del mondo della finanza", intervistato nel corso di un notiziario serale a diffusione nazionale di venerdì 19 settembre, nell'intento di rassicurare i risparmiatori, ha affermato: "Il titolo Unicredit, dopo il crollo di giovedì 18 settembre, nella seduta di venerdì 19 settembre ha colmato le perdite, superando la quotazione a cui si era attestato martedì 16 settembre". In accordo con il motto "verba volant, scripta manent", sei d'accordo a sottoscrivere l'affermazione dell'esperto?

| **Quotazioni ufficiali titolo Unicredit a Piazza Affari** | | |
|---|---|---|
| data | variazione % | valore unitario azione |
| 16/09/2008 | / | 3,623 |
| 18/09/2008 | -12,69 | |
| 19/09/2008 | +13,18 | |

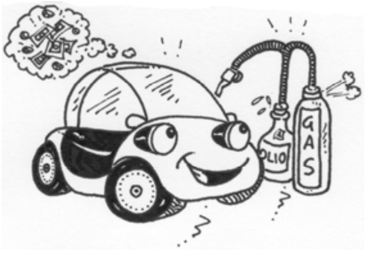
### Incassi del cinema

“Tiene il pubblicano e aumentano gli incassi al cinema.  Nel periodo 1 gennaio – 31 dicembre 2009, si sono venduti in Italia 99 milioni di biglietti (-0,30% rispetto al 2008) e si sono incassati 623 milioni di euro (+4,95%). Secondo il Presidente Anec (Associazione Nazionale Esercenti Cinema) Protti la sostanziale tenuta rispetto al pubblico e la crescita degli incassi vanno valutati positivamente. I cinema si mantiene saldo”
[Fonte: ANSA 5.1.2010, dati Cinetel]

Sulla base di queste informazioni valutare l’aumento del *costo medio* dei biglietti.

### Costo gasolio

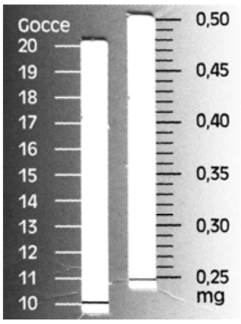
Nella tabella seguente è riportato il prezzo medio alla pompa del gasolio per autotrazione (2004).
Operare un rapporto percentuale dei prezzi nei diversi paesi, assunto come riferimento il prezzo in Italia.




| NAZIONE | Quantità (unitaria) | prezzo |
|---|---|---|
| Austria | litro | 0,72 € |
| Belgio | litro | 0,69 € |
| Finlandia | litro | 0,79 € |
| Francia | litro | 0,76 € |
| Germania | litro | 0,85 € |
| Grecia | litro | 0,60 € |
| Italia | litro | 0,85 € |
| Portogallo | litro | 0,74 € |
| Regno Unito | gallone (U.K.) | 3,60 £ |
| Spagna | litro | 0,68 € |
| Svezia | litro | 0,79 € |
| U.S.A. | gallone (U.S.A.) | 1,57 $ |

## Dosaggio di medicinali

La confezione di un medicinale riporta la seguente tabella di conversione per facilitare i pazienti nel seguire le indicazioni del medico circa il dosaggio.
Predisporre una tabella di conversione.



# Matematica&Realtà

Percorso J

## Proporzionalità e linearità nella vita reale

## Unità didattica J2- linearità


a cura di

**Primo Brandi – Anna Salvadori**

Dipartimento di Matematica e Informatica

Università degli Studi di Perugia

Matematica&Realtà

Percorso J

# Proporzionalità e linearità nella vita reale

## Unità didattica J2- linearità

**A cura di**
**Primo Brandi – Anna Salvadori**

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università degli Studi di Perugia

### Introduzione

Il percorso J propone una rivisitazione di due argomenti classici della formazione scolastica, la proporzionalità e la linearità, in un'ottica diversa basata sull'interazione fra mondo reale e matematica.

L'argomento mira a far emergere un approccio unificante in *continuità* fra scuola superiore di I grado e di II grado.

Questi tema si inserisce in un processo più articolato che ha lo scopo di illustrare le potenzialità della *rappresentazione mediante funzioni elementari* per la comprensione e la soluzione di problemi del quotidiano [1-2]).

In questa seconda unità didattica affrontiamo lo studio della **linearità**.

I bozzetti umoristici sono di Luigi Aluffi

### Referenze

Riferimenti strettamente collegati

[1] P.Brandi-A.Salvadori, Matematica&Realtà, Introduzione alla modellizzazione matematica con strumenti elementari, Università degli Studi di Perugia (2010)
[2] P.Brandi-A.Salvadori, Prima di iniziare (Conoscenze e competenze Matematiche di base per l'Università) 2009-10
[3] P.Brandi-A.Salvadori, Progetto RealM@t – Innovadidattica MIUR, 2009
[4] P.Brandi-A.Salvadori, Modelli matematici elementari, Ed. B.Mondadori (2004)

I Dossier M&R di Alice&Bob con contributi delle varie Unità Locali M&R

*Dalle tabelle ai grafici* , Alice e Bob, 3 (2007) 21-28
*Primi modelli lineari.* Alice e Bob, 4 (2007) 21-28

I progetti di approfondimento svolti dai ragazzi partecipanti ai Laboratori M&R con la guida dei loro Tutor e presentati al convegno annuale Esperienze a confronto.

AA.VV. Matematica&Realtà, Esperienze a confronto DVD (aggiornamento 2010)

## Dal mondo reale al mondo matematico – Quali relazioni fra proporzionalità e linearità?

Iniziamo con una *rilettura* di alcuni modelli affrontati nell'unità didattica Segmento B1, focalizzando l'attenzione sull'approccio grafico, invece che numerico.

### J1.10' Sconti eccezionali

**Il negozio NUOVA Musica offre uno sconto del 10% sui DVD musicali.**
**Valutiamo l'offerta.**

**Dalla tabella al grafico**

Nella primo segmento B1 abbiamo costruito una tabella per confrontare il prezzo pieno e quello scontato

tabella

| Sconto del 10% | |
|---|---|
| **Prezzo pieno** | **Prezzo scontato** |
| 10 | 9 |
| 12 | 10,8 |
| 15 | 13,5 |
| 20 | 18 |
| 25 | 22,5 |
| 30 | 27 |
| 35 | 31,5 |
| 40 | 36 |

Come abbiamo già osservato, le grandezze nelle due colonne sono *direttamente proporzionali*. Se riportiamo i dati della tabella in un grafico

tabella


si ottengono punti allineati!

Potrebbe essere un caso … Ripetiamo l'esperimento con un'altra coppia di grandezze proporzionali.

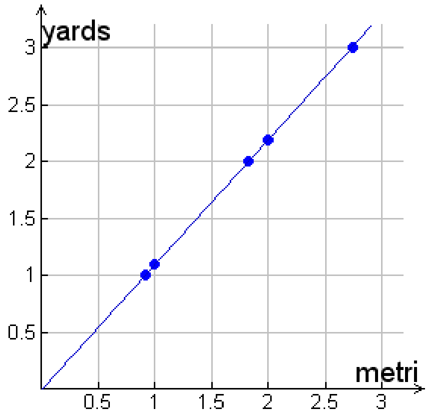
## J1.18’ Sistemi di misura equivalenti

**Consideriamo la misura delle lunghezze nel sistema di misura internazionale e nel sistema in glese. Nel p rimo sistema l’u nità d i misu ra è il *metro*, nel secondo lo *yard* (equivalente a 0,914m). Le misure di lunghezza (di grandezze arbitrarie) rispetto a lle d ue unità di mis ura c ostituiscono due c lassi direttamente proporzionali. La costante di proporzi onalità fra le classi è il fattore di conversione fra le unità di misura.**

| metri | yards |
|---|---|
| 0,914 | 1 |
| 1 | 1,094 |
| 1,828 | 2 |
| 2 | 2,188 |
| 2,742 | 3 |
| 3 | 3,282 |

**Dalla tabella al grafico**

Riportando i dati della tabella in un grafico, si ottiene il seguente risultato




I punti sono ancora allineati!

Sorge allora spontanea la congettura: coppie di elementi corrispondenti di due classi di grandezze direttamente proporzionali individuano punti allineati.

**Una pillola di teoria** **Proporzionalità e linearità**

Assegnate due classi di grandezze $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ in **corrispondenza biunivoca**

| elementi in classe $\mathfrak{A}$ | elementi in classe $\mathfrak{B}$ |
|---|---|
| $a_1$ | $b_1$ |
| $a_2$ | $b_2$ |
| $\cdots$ | $\cdots$ |
| $a_n$ | $b_n$ |

ci proponiamo di esaminare quali relazioni intercorrano fra la proporzionalità diretta delle classi e proprietà geometriche dei punti $P_i = (a_i, b_i)$.

Iniziamo provando la "congettura"

**proporzionalità** $\Rightarrow$ **linearità**

**Se due classi di grandezze sono in proporzionalità diretta, allora le coppie di elementi corrispondenti individuano punti allineati con l'origine**

Se $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ sono direttamente proporzionali.

| Elementi in classe $\mathfrak{A}$ | elementi in classe $\mathfrak{B}$ |
|---|---|
| $a_1$ | $b_1$ |
| $a_2$ | $b_2$ |
| $\cdots$ | $\cdots$ |
| $a_n$ | $b_n$ |

Dalle proporzioni

(1.1) $$a_1 : a_2 = b_1 : b_2 \qquad a_2 : a_3 = b_2 : b_3 \qquad \cdots$$

in virtù della **proprietà dello scomporre**

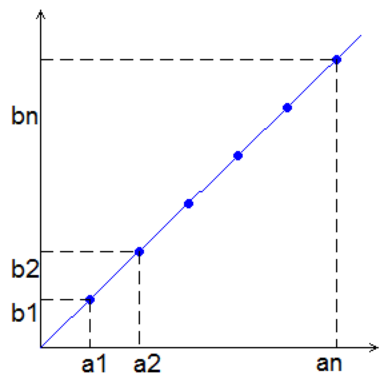
$$(a_1 - a_2) : a_2 = (b_1 - b_2) : b_2 = \cdots$$

e di quella del permutare, si deduce

(1.6) $$(a_1 - a_2) : (b_1 - b_2) = a_2 : b_2 = (a_2 - a_3) : (b_2 - b_3) = a_3 : b_3 = \text{cost}$$

In altre parole

**il rapporto della differenza di due elementi della prima classe con la differenza dei corrispondenti elementi è costante,** pari alla costante di proporzionalità fra le classi $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$.

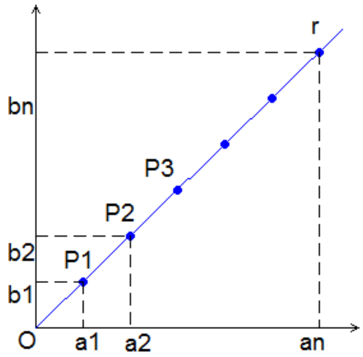



In forza della condizione necessaria del teorema di Talete, la (1.6) equivale ad affermare che **le coppie** $(a_i, b_i)$ **rappresentano punti allineati con l'origine**.
Inoltre il rapporto di proporzionalità fra le classi coincide con il coefficiente angolare della retta per l'origine ove giacciono i punti $(a_i, b_i)$

Viceversa, in virtù della condizione sufficiente del Teorema di Talete, si prova l'implicazione inversa.

**linearità $\Rightarrow$ proporzionalità**

**Se $(a_i, b_i)$ sono dei punti allineati con l'origine $\Rightarrow$ le classi delle coordinate omonime $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ sono in proporzionalità diretta**




In definitiva sussiste l'equivalenza

**proporzionalità $\Leftrightarrow$ linearità**

Inoltre la costante *k* di proporzionalità fra le classi $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ coincide il coefficiente angolare della retta

$$y = k\,x$$

ove giacciono le coppie di elementi corrispondenti $(a_i, b_i)$

Questa *equivalenza* consente una interessante relazione fra l'approccio *numerico* e quello *geometrico* al concetto di proporzionalità, come sarà messo in luce nei prossimi esempi.

## J1.1’ Velocità di lettura

**Charles Osg ood, famo so co nduttore d ell’emittente a mericana CBS, so stiene d i impieg are circa 1 min uto a legg ere 15 rig he (battute a interlinea doppia).**

**Determinare l a fu nzione ch e d escrive il n umero d i rig he ch e Charles legge in funzione del tempo (in secondi).**
**Sulla base del modello, rispondere alle seguenti domande:**

**a) Quante righe riesce a leggere in 10 secondi?**
**b) Quanto tempo impiega a leggere una pagina (formato** A4**)?**

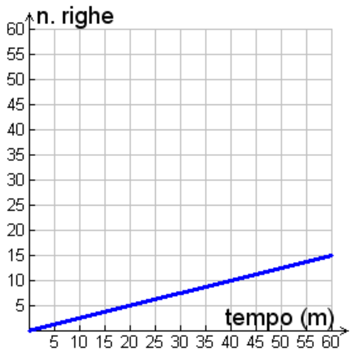

**Costruzione del modello**

Nella Sezione B1, dopo aver osservato che il numero di righe lette e il tempo impiegato nella lettura sono grandezze direttamente proporzionali. Abbiamo inoltre calcolato la costante di proporzionalità: 4.

Quindi la funzione che descrive il numero di righe in funzione del tempo (minuti) è

(1) $r(t) = t/4$

(cfr. grafico a lato).




**a) Risposta al quesito**

La riposta si ottiene calcolando $r(10) = 10/4 = 2{,}5$

cioè il commentatore in 10 secondi riesce a leggere due righe e mezzo.

**b) Risposta al quesito**

In un foglio formato A4 sono presenti in media 25 righe (a doppia interlinea).

**caso 26 righe**

Per rispondere al quesito dobbiamo risolvere l’equazione

$$r(x) = 25 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{4} = 25 \quad \Rightarrow \quad x = 100 \quad \text{secondi}$$

oppure, tenuto conto dell'equivalenza fra rappresentazione decimale e sessagesimale, diremo che Charles impiega 1 minuto e 40 secondi per leggere una pagina (poco più di due minuti e mezzo).

Si osservi che la relazione

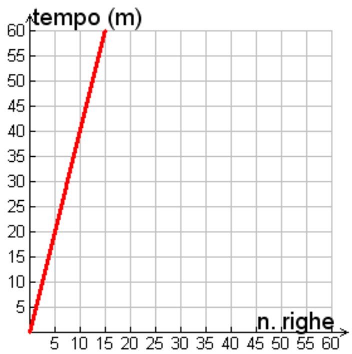
(2) $t = t(r) = 4r$

descrive il tempo impiegato a leggere $r$ righe.

Si tratta quindi della **relazione inversa** di (1).

**Relazione inversa**

Ovviamente si tratta ancora di una funzione lineare (cfr. grafico a lato)



Una situazione tratta dalla vita reale propone un approfondimento della relazione fra proporzionalità e le rette del piano (non necessariamente passanti per l'origine degli assi)

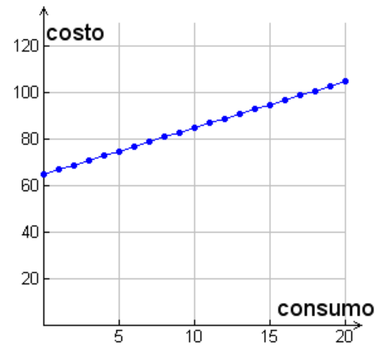
## J2.1 Acqua *salata*

**In una cittadina degli Stati Uniti d' America i costi per il consumo dell'acqua potabile erogata dalla riserva municipale sono proporzionali ai consumi, fatto salvo una quota fissa annuale.**
**Precisamente, la quota fissa annuale è di** 65 $**, mentre ogni *cubic/foot* di consumo costa** 2,5 **centesimi.**

Nella tabella seguente sono riportati i costi in funzione dei consumi (cfr. anche grafico).
Osserviamo che le grandezze in tabella *non sono proporzionali* anche se le coppie $(a_i, b_i)$ di elementi corrispondenti sono *allineati*

Tabella e grafico

| Consumo (cubic/foot) | Costi ($) |
|---|---|
| 1 | 65+2,5 |
| 2 | 65+2*2,5 |
| 3 | 65+3*2,5 |
| ⋮ | ⋮ |
| n | 65+n*32,5 |




I costi complessivi infatti non sono proporzionali ai consumi, ma sottraendo i costi fissi la spesa residua è proporzionale ai consumi.
Precisamente le classi di grandezze nella tabella a lato sono **in proporzione**.

| Consumo (cubic/foot) | Costi per consumi ($) |
|---|---|
| 1 | 2,5 |
| 2 | 2*2,5 |
| 3 | 3*2,5 |
| ⋮ | ⋮ |
| n | n*2,5 |

## Una pillola di teoria — Rette e proporzioni

Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ due classi di grandezze in **corrispondenza biunivoca**

| elementi in classe $\mathcal{A}$ | elementi in classe $\mathcal{B}$ |
|---|---|
| $a_1$ | $b_1$ |
| $a_2$ | $b_2$ |
| $\dots$ | $\dots$ |
| $a_n$ | $b_n$ |

Osserviamo che, ancora in virtù del teorema di Talete, sussiste un'ulteriore equivalenza fra la proporzionalità e le rette del piano (non necessariamente passanti per l'origine degli assi)

**punti allineati $\Leftrightarrow$ differenze in proporzione**

**Le coppie $(a_i, b_i)$ si distribuiscano su una retta (non parallela ad alcuno degli assi coordinati), se e solo se le classi delle *differenze* di coordinate omonime sono in proporzionalità diretta.** *Inoltre il coefficiente angolare m della retta coincide con la costante di proporzionalità fra le classi delle differenze, mentre l'ordinata all'origine q soddisfa l'identità rispetto ad i*

$$b_i = m\,a_i + q \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

**Dimostrazione**.

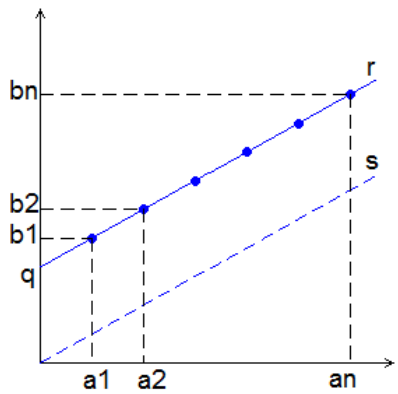
Proviamo solo la condizione sufficiente ($\Rightarrow$)

Supponiamo che le coppie $(a_i, b_i)$ di **elementi corrispondenti delle due classi si distribuiscano su una retta** $r$ di equazione

$$y = mx + q$$

(non parallela ad alcuno degli assi coordinati, cfr. grafico a lato).

In forza del teorema di Talete **le classi delle differenze di coordinate omonime sono in proporzionalità diretta.**




| elementi in classe $\mathcal{A}^*$ | elementi in classe $\mathcal{B}^*$ |
|---|---|
| $a_1 - a_2$ | $b_1 - b_2$ |
| $a_2 - a_3$ | $b_2 - b_3$ |
| $\dots$ | $\dots$ |
| $a_n - a_{n-1}$ | $b_n - b_{n-1}$ |

Determiniamo la costante di proporzionalità fra le classi $\mathcal{A}^*$ e $\mathcal{B}^*$.
In forza dell'appartenenza dei punti $(a_i, b_i)$ alla retta $r$, deve risultare

$$b_1 = m\,a_1 + q \qquad b_2 = m\,a_2 + q$$

da cui

$$b_1 - b_2 = m(a_1 - a_2)$$

In altri termini, la **costante di proporzionalità** fra le classi c**oincide con il coefficiente angolare** della retta.

Inoltre, considerando la retta $s$ per l'origine parallela ad $r$ (ottenuta per traslazione), in forza di quanto dimostrato nella pillola di teoria dedicata alla relazione proporzionalità a linearità, la classe $\mathcal{A}$

e la classe $\mathcal{B}^{**}$ (ottenuta sottraendo $q$ ad ogni elemento della classe $\mathcal{B}$) costituiscono due classi di grandezze direttamente proporzionali

| classe $\mathcal{A}$ | classe $\mathcal{B}$ | classe $\mathcal{B}^{**}$ |
|---|---|---|
| $a_1$ | $b_1$ | $b_1 - q$ |
| $a_2$ | $b_2$ | $b_2 - q$ |
| $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ |
| $a_n$ | $b_n$ | $b_n - q$ |

Naturalmente sussistono le relazioni per ogni $i$

$$m = \frac{b_i - b_{i+1}}{a_i - a_{i+1}}$$

$$q = b_i - m\, a_i$$

Ora siamo in grado di affrontare le situazioni seguenti.

## J2.2 Ricerca dispersi

**Per effettuare la ricerca di persone disperse in aree remote gli operatori del gruppo “Search and rescue” negli Stati Uniti agiscono in questo modo:**
**i singoli componenti di ciascun *team* setacciano l’area interessata movendosi lungo tragitti rettilinei, paralleli e equidistanti.**
**L’esperienza ha dimostrato che la possibilità di trovare il disperso è correlata alla distanza d fra due tragitti adiacenti.**

**Nella tabella è riportata la percentuale (approssimata) dei successi *R* relativi ad un tipo di territorio, in relazione a differenti distanze fra due tragitti.**

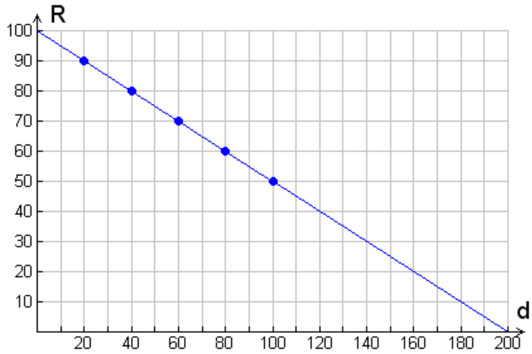
| *d* (metri) | **20** | **40** | **60** | **80** | **100** |
|---|---|---|---|---|---|
| *R* (%) | **90** | **80** | **70** | **60** | **50** |

**Analisi dei dati**

Se riportiamo i dati della tabella in un opportuno sistema di riferimento cartesiano (cfr. grafico seguente), si vede che i punti sono allineati.

Funzione decrescente

La percentuale di ritrovamenti è funzione decrescente della distanza $d$ fra due tragitti, cioè *più distanti* sono le piste dei ricercatori, *più bassa* è la percentuale dei ritrovamenti.




Analizzando i dati in tabella, si vede facilmente che $d$ ed $R$ **non** sono grandezze direttamente proporzionali.
Tuttavia, per quanto abbiamo già osservato, l’allineamento dei punti individua due classi di grandezze direttamente proporzionali, costituito dalle differenze di coordinate omonime.

| *d* (metri) | **20-40** | **40-60** | **60-80** | **80-100** |
|---|---|---|---|---|
| *R* (%) | **90-80** | **8-700** | **70-60** | **60-50** |

Volendo estrapolare i dati assegnati e determinare la percentuale di successi relativa alla distanza *d=150* m, si ottiene:

$$(150-20):(x-90)=(100-20):(50-90)$$

da cui

$$x=35$$

Ancora per estrapolazione possiamo valutare la distanza $d$ la cui percentuale di ritrovamenti è pressoché nulla:

$$(d-20):(0-90)=(100-20):(50-90)$$

da cui

$$d=200.$$

**Previsione**

Sulla base dei dati, si può prevedere che, se la distanza fra due piste supera $200\,m$ la percentuale dei ritrovamenti è pressoché nulla.

## J1.12’ Sconti eccezionali a confronto

**Due negozi di musica propongono due diverse offerte**

- **SUPER Musica fa uno sconto di 5 € sul conto totale**
- **NUOVA Musica offre uno sconto del 10%**

**Discutere la convenienza della due offerte**.

**Analisi della situazione**

Per operare un confronto possiamo costruire una tabella dei due sconti, in relazione a spese diverse

Approccio numerico

| Prezzo pieno | SUPER Musica prezzo scontato (sconto 5 €) | NUOVA Musica prezzo scontato (sconto 10%) |
|---|---|---|
| 10 | 5 | 9 |
| 12 | 7 | 10,8 |
| 15 | 10 | 13,5 |
| 20 | 15 | 18 |
| 25 | 20 | 22,5 |
| 30 | 25 | 27 |
| 35 | 30 | 31,5 |
| 40 | 35 | 36 |

Dalla tabella sembrerebbe che l’offerta di SUPER Musica è più conveniente … anche se la convenienza diminuisce con il crescere del conto.
Per operare un confronto significativo, dobbiamo determinare le *relazioni funzionali* prezzo pieno - prezzo scontato per ciascuno dei due negozi.

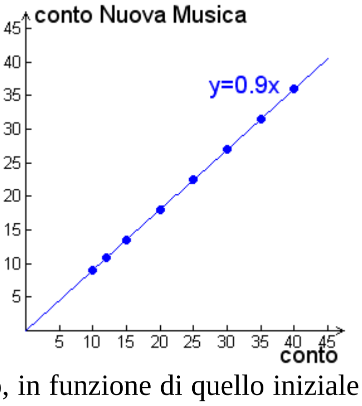
**Costruzione del modello**

Iniziamo con NUOVA Musica.

**NUOVA Musica**

Approccio grafico

Come abbiamo già osservato, la prima e terza colonna (prezzo pieno, prezzo scontato del 10%) sono classi di grandezze in proporzionalità diretta. Pertanto le coppie di elementi corrispondenti rappresentano punti allineati con l’origine e la **retta di supporto** è




$$y = 0.9x$$

Approccio formale

In definitiva la funzione che descrive il prezzo scontato, in funzione di quello iniziale $x$ è

$$f(x) = 0.9x$$

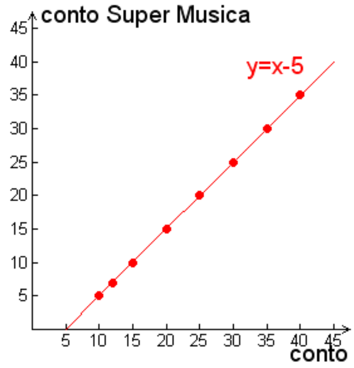
**NUOVA Musica**

Passiamo ora ad analizzare NUOVA Musica.

E’ immediato osservare che la prima e seconda colonna (prezzo iniziale, prezzo scontato di 5 €) **non** sono grandezze proporzionali.

Approccio grafico

Riportando i dati in un sistema di riferimento cartesiano, otteniamo ancora dei punti allineati (anche se la retta supporto non passa per l'origine).




Approccio formale

La relazione funzionale che lega il prezzo pieno $x$ con quello scontato è descritta dalla retta (non passante per l'origine)

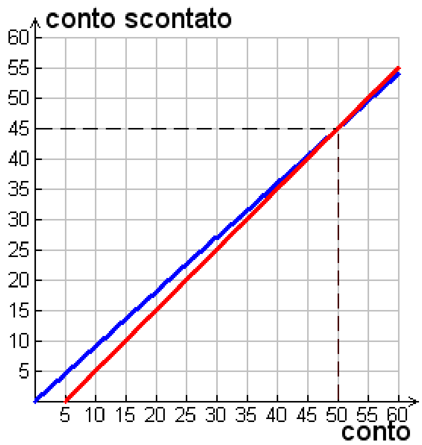
$$g(x) = x - 5$$

Vincolo sul dominio

Si osservi che il modello è **significativ**o solo per $x > 5$.

**Confronto fra i due modelli**

Per confrontare le due offerte, riportiamo i due grafici nello stesso sistema di riferimento




Confronto grafico

Dall'immagine appare che il **punto di equilibrio** è $x = 50$.

Possiamo controllare la congettura per via algebrica, cioè risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y = 0.9x \\ y = x - 5 \end{cases}$$

Confronto algebrico

Risolvendo il sistema per confronto si ha

$$0.9x = x - 5 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5}{0.1} = 50$$

da cui si ottiene immediatamente la soluzione

Soluzione del sistema

$$\begin{cases} x = 50 \\ y = 45 \end{cases}$$

**Conclusione**
La soluzione matematica nel mondo reale

Se pensiamo di spendere meno di 50 € in regali musicali, andiamo da SUPER Musica, altrimenti sarà conveniente rivolgersi a NUOVA Musica. Nel caso il nostro conto sia esattamente di 50 € è indifferente a quale dei due negozi ci rivolgiamo in quanto la spesa effettiva sarà comunque di 45 €.

## J1.15’ Il nonno in palestra

**Marco, istruttore di una palestra, si documenta e scopre che**

- **la frequenza cardiaca massima (FCmax) (in funzione dell’età) si può calcolare sottraendo al valore di 220 battiti al minuto l’età del soggetto, indipendentemente da sesso e razza (errore stimato inferiore a 10 battiti al minuto)**
- **l’allenamento – per essere efficace - dovrà mantenere il numero di battiti entro un intervallo compreso tra il 90% e il 70 % della frequenza cardiaca max.**

**Per sfruttare al meglio le sue informazioni e diffonderle agli utenti della palestra, Marco decide di costruire un modello che**

- **descriva la frequenza cardiaca massima teorica per le persone di età compresa tra 20 e 70 anni**
- **Individui la fascia di allenamento efficace.**

Fonte: Fisiologia Applicata allo Sport W.D.McArdle;F.I. Katch;V.L. Katch, Casa Editrice Ambrosiana
Problema proposto dall’Unità locale M&R di Città di Castello, Referente Prof. Loriana Mandorla, ITIS Franchetti

**Costruzione del modello**

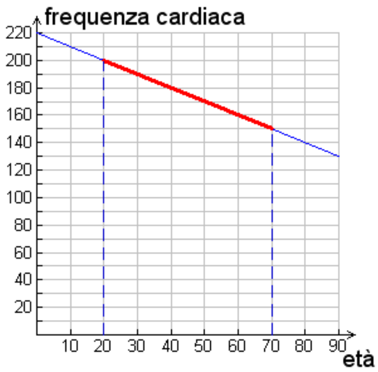
Denotata con $x$ l’età del soggetto, la frequenza massima (teorica) è descritta dalla funzione

$$FC(x) = 220 - x \qquad 20 \le x \le 70$$

Poiché l’equazione

$$y = 220 - x$$

rappresenta una retta (cfr. grafico a lato), la frequenza massima dipende linearmente dall’età.




Il semento in rosso in grassetto descrive la frequenza massima in funzione dell’età, nel range 20-70 anni.

**Fascia efficace**

La fascia di allenamento efficace è determinata dalle funzioni

$$FC_{\min}(x) = 0.7FC(x) = 0.7(220 - x) = 154 - 0.7x \qquad 20 \le x \le 70$$

$$FC_{\max}(x) = 0.9FC(x) = 0.9(220 - x) = 198 - 0.9x \qquad 20 \le x \le 70$$

Si tratta ancora di due segmenti di retta (cfr. grafico seguente).

**Segmenti non paralelleli**

Poiché i coefficienti angolari delle due rette di supporto sono rispettivamente 0.7 e 0.9, i due segmenti **non sono paralleli**.

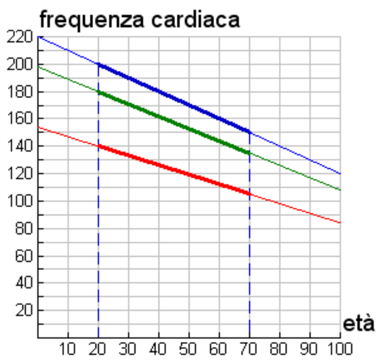
Dal grafico è evidente che l’ampiezza della fascia di allenamento efficace diminuisce con l’età.
Si può facilmente valutare, ad esempio che

la fascia di allenamento efficace a 20 anni è

$$140 \div 180 \text{ battiti/minuto}$$

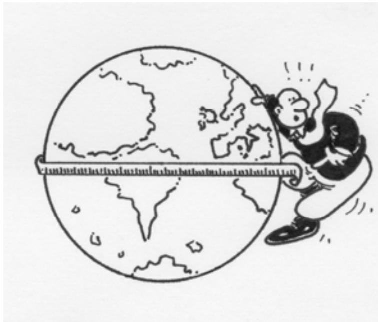
mentre a fascia di allenamento efficace a 70 anni è

$$105 \div 135 \text{ battiti/minuto}$$



## QUESITI E MODELLI

### Sistemi di misura equivalenti



Determinare la relazione funzionale tra una misura effettuata in metri e la stessa effettuata in yard (misura in metri funzione della misura in yard). Individuare la *relazione inversa* (misura in metri in funzione della misura in yard).

### On sale

Dopo uno sconto del 25% una maglietta viene venduta a 15 euro. Quanto costava prima di essere scontata?
Determinare la relazione funzionale fra prezzo scontato e prezzi di listino, nel caso di uno sconto del 25%.
Generalizzare al caso di uno sconto di s%.

### Incassi del cinema

"Tiene il pubblico e aumentano gli incassi al cinema. Nel periodo 1 gennaio – 31 dicembre 2009, si sono venduti in Italia 99 milioni di biglietti (-0,30% rispetto al 2008) e si sono incassati 623 milioni di euro (+4,95%). Secondo il Presidente Anec (Associazione Nazionale Esercenti Cinema) Protti la sostanziale tenuta rispetto al pubblico e la crescita degli incassi vanno valutati positivamente. I cinema si mantiene saldo"
[Fonte: ANSA 5.1.2010, dati Cinetel]

Sulla base di queste informazioni, assunto un trend costante, effettuare una previsione sul numero dei biglietti venduti e sugli incassi del 2010.

### Cardiofitness

Jennifer Aniston (ex moglie di Brad Pitt) ha detto di fare pratica di cardiofitness tutti i giorni per 20 minuti, con jogging o con la cyclette. Non stupisce che a 40 anni ne dimostri 10 di meno.
Per chi vuole fare le cose con rigore, c'è anche un metodo scientifico: si calcola il 70% della propria età e si sottrae a 208, successivamente si calcola il 60% di quanto ottenuto.
Il risultato è il numero medio di battiti cardiaci al minuto da tenere durante gli esercizi.
Confrontare questo modello con quello discusso nell'esercizio "Il nonno in palestra".

Problema proposto dall'Unità locale M&R di Città di Castello, Referente Prof. Loriana Mandorla, ITIS Franchetti