Matematica&Realtà

Percorso C

**Modelli elementari della realtà:
dai modelli lineari ai modelli non lineari**

Unità didattica C1- modelli lineari

a cura di

Primo Brandi – Anna Salvadori
Dipartimento di Matematica e Informatica
Università degli Studi di Perugia

Matematica&Realtà

Percorso C

Modelli elementari della realtà: dai modelli lineari ai modelli non lineari

Unità didattica C1- modelli lineari

A cura di
Primo Brandi – Anna Salvadori

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università degli Studi di Perugia

Introduzione

Il percorso C propone un'introduzione elementare alla modellizzazione matematica della realtà.

Quando si vuole comprendere un fenomeno o si deve affrontare una problematica del mondo reale, può essere conveniente costruire un "prototipo virtuale" sul quale operare delle simulazioni: **il modello matematico**.

Un po' come avviene quando il sarto, prima di tagliare la stoffa, disegna e lavora sul modello di carta dell'abito o l'ingegnere che fonda il suo intervento sulla base del progetto.

Il modello matematico consente un esame oggettivo della situazione che facilita la comprensione del problema, aiuta nella valutazione di eventuali scelte e permette anche di … azzardare previsioni!

Come vedremo con alcuni esempi, può essere conveniente ricondursi ad un modello matematico anche per affrontare questioni spicciole della vita quotidiana e si possono costruire modelli matematici avendo a disposizione strumenti elementari (la matematica di base appresa a scuola).

In questa prima unità didattica affrontiamo lo studio dei **modelli lineari**.

I bozzetti umoristici sono di Luigi Bluffi

Referenze

Riferimenti strettamente collegati

[1] P.Brandi-A.Salvadori, Matematica&Realtà, Introduzione alla modellizzazione matematica con strumenti elementari, Università degli Studi di Perugia (2010)
[2] P.Brandi-A.Salvadori, Prima di iniziare (Conoscenze e competenze Matematiche di base per l'Università) 2009-10
[3] P.Brandi-A.Salvadori, Modelli matematici elementari, Ed. B.Mondadori (2004)

I Dossier M&R di Alice&Bob con contributi delle varie Unità Locali M&R

Sistemi lineari. Alice e Bob, 6-7 (2008) 29-33
Modelli lineari a tratti. Alice e Bob, 5 (2008) 21-28
Primi modelli lineari. Alice e Bob, 4 (2007) 21-28

I progetti di approfondimento svolti dai ragazzi partecipanti ai Laboratori M&R con la guida dei loro Tutor e presentati al convegno annuale Esperienze a confronto.

AA.VV. Matematica&Realtà, Esperienze a confronto DVD (aggiornamento 2010)

Primi modelli lineari

Iniziamo con la “lettura” e l’interpretazione di un modello matematico già “pronto”.

Acqua salata

Nella cittadina di Maple Grove (USA) i costi per il consumo (annuo) dell’acqua potabile – erogata dalla riserva municipale – sono calcolati sommando una quota fissa e una quota variabile, proporzionale ai consumi.
La funzione che descrive i costi (in $) in funzione dei consumi (in *cubic feet* ;1 foot = 30,48 cm) è la seguente

$$C(x) = 0.025x + 65$$

Dopo aver disegnato il grafico della funzione proviamo a rispondere alla seguenti domande.

a) A quanto ammontano i costi fissi?

b) Qual è la spesa di un contribuente che consuma 1.600 *cubic feet* all’anno?

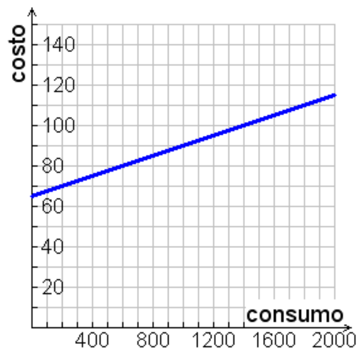
d) Quanto avrà consumato un contribuente che ha ricevuto un bolletta di 93 $?

Lettura del modello

Rappresen-tazione grafica

Servendosi eventualmente di una tabella e operando con la carta a quadretti oppure facendo uso della tecnologia si ottiene il grafico a lato.

Osserviamo che il sistema è *di-metrico* in quanto adotta due unità di misure differenti:
cubic feet nell’asse delle ascisse e *dollari* per le ordinate.



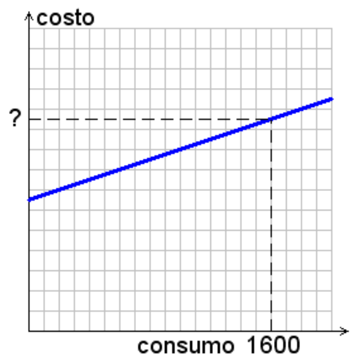
Quesito a) Per valutare i costi fissi occorre stimare la spesa corrispondente a *zero consumi*:

$$C(0) = 65$$

I costi fissi (che ammontano a 65 $) corrispondono **all’intercetta sull’asse delle ordinate**.

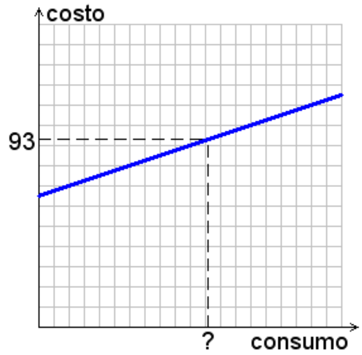
Quesito c) La spesa di un contribuente che consuma 1.600 *cubic feet* si calcola valutando la funzione costo $C(x)$ per $x = 1600$, ovvero la spesa ammonta a 105 $ essendo

$$C(1600) = 0.025 \cdot 1600 + 65 = 105$$



Quesito d) Denotiamo con $\overline{x}$ il consumo (incognito) di un contribuente che ha pagato una bolletta di 93 dollari.
Per rispondere al quesito occorre risolvere l'equazione

$$C(\overline{x}) = 93 \quad \Leftrightarrow \quad 0.025\overline{x} + 65 = 93$$



Equazione di I grado

Si tratta di un'equazione di primo grado

$$0.025\overline{x} + 65 = 93 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{28}{0.025} = 1120$$

Il consumo è quindi 1120 *cubic feet*.

La funzione che descrive i costi in funzione dei consumi è una retta.
Non è una funzione lineare: infatti, se i consumi dimezzano, i costi non dimezzano a causa delle spese fisse.
Tuttavia, *trascurando le spese fisse*, si avrebbe una dipendenza consumi-costi di tipo lineare, esattamente $C(x) = 0.025x$
In altri termini, se trasliamo la funzione portando l'intercetta a zero, si ottiene una funzione lineare.
Modelli di questo tipo sono quindi *assimilabili* ai modelli lineari.

Ora priviamo a cimentarci nella **costruzione di un modello**.

Imbianchino fai da te

Il Sig. Rossi vorrebbe "rinfrescare" le pareti della sua villetta con l'aiuto di un amico. Si reca in un negozio di "bricolage" per acquistare l'occorrente e scopre che

con $1kg$ di idropittura si possono tinteggiare circa $5m^2$ di parete (due "mani").

Il Sig. Rossi è in difficoltà nel valutare la quantità di idropittura da acquistare. Possiamo aiutarlo?

Costruzione del modello
Una prima domanda

Cominciamo, innanzi tutto, ponendoci la domanda:

quanta vernice (v) è necessaria per dipingere (a due mani) $1m^2$ di parete?

Servendoci della tabella a lato, possiamo impostare la proporzione

$$5:1 = 1:v \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{5} = 0.2$$

Superficie (m^2)	Idropittura (kg)
5	1
1	v

ovvero

Risposta alla prima domanda

per dipingere $1m^2$ di parete (due mani) occorrono $0.2kg$ di vernice (cioè $200g$).

La seconda domanda che ci poniamo:

Seconda domanda

se vogliamo dipingere una parete di $x\,m^2$ (due mani), quanta vernice $v = v(x)$ dobbiamo acquistare?

Funzione superficie-vernice

Rispondere al quesito equivale a determinare la relazione che lega la superficie (m^2) da dipingere, con la quantità di idropittura (kg) necessaria per tinteggiare.
Si tratta di una relazione funzionale fra le due variabili:

superficie - *quantità di idropittura*.

Servendoci della tabella a lato, otteniamo la proporzione seguente

$$1:0.2 = x:v(x)$$

Superficie (m^2)	Idropittura (kg)
1	0.2
x	v(x)

Risposta alla seconda domanda

che fornisce l'espressione della **funzione che descrive la quantità di vernice in funzione della superficie**:

$$v(x) = 0.2\,x$$

il cui grafico è a lato.

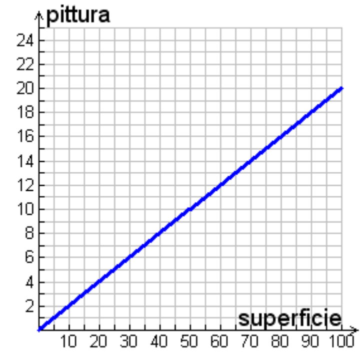


Grafico della funzione v(x)

Come era naturale aspettarsi, si tratta di una **funzione lineare**.

Funzione lineare

In particolare, per dipingere una superficie di $15m^2$ occorrono $v(15) = 3kg$ di idropittura, per dipingere una superficie doppia, cioè di $30m^2$, occorre una quantità doppia di vernice: $v(30) = 6\,kg$. Per una superficie tre volte più ampia ($45\,m^2$) occorrerà il triplo di idropittura ($9\,kg$) e così via.

La funzione *superficie-quantità* di idropittura è un modello matematico che descrive la problematica del Sig. Rossi

$$v(x) = 0.2\,x$$

Ora siamo in grado di fornire al Sig. Rossi le informazioni di cui aveva bisogno.
Precisamente, a seconda del numero di stanze che pensa di dipingere (tenuto conto della relativa superficie), siamo in grado di dirgli immediatamente quante idropittura dovrà acquistare.

Imbianchino fai da te (continua)

Il Sig. Rossi è felice del risultato, ma la moglie gli fa presente che quello che a lei interessa di più è la spesa! Oltre al costo della vernice occorre tener conto della spesa per pennelli, diluente, carta vetrata, etc…

Tornato al negozio di bricolage per un preventivo spese, scopre che l'attrezzatura necessaria per dipingere e ripulire i pennelli gli costerebbe circa 35 € e il costo dell'idropittura è di 4€ il chilo.
Il Sig. Rossi si chiede:

qual è la spesa che deve affrontare per "rinfrescare" la casa, tutta o in parte?

Modifica del modello

In effetti il modello che gli abbiamo fornito non tiene conto delle spese.
Dobbiamo quindi modificare l'impostazione. Osserviamo che la spesa complessiva si ottiene sommando la spesa per le attrezzatura con quella per la vernice:

$$spesa\ totale = spesa\ atterzzatura + spesa\ idropittura$$

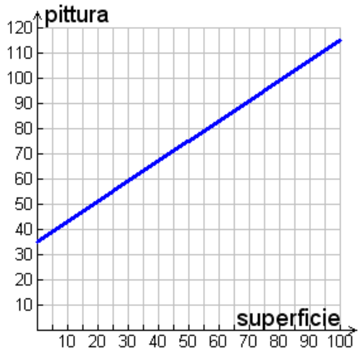
La spesa per l'attrezzatura è fissa, mentre quella relativa alla vernice dipende dalla quantità di idropittura utilizzata e quindi dalla superficie che si intende tinteggiare.
Tenuto conto che il costo della vernice è di 4€ al kg e che la quantità la vernice necessaria a dipingere $x\,m^2$ di superficie è $v(x) = 0.2\,x$, si ottiene che la spesa per la vernice, in funzione della superficie, è pari

$$s_{idropittura}(x) = 4 \cdot 0.2\,x$$

La funzione che descrive la **spesa totale in funzione della superficie da dipingere** è quindi pari a

$$s(x) = 35 + 4 \cdot 0.2\,x$$

il cui grafico è riportato a lato.



Il grafico della funzione è ancora una retta.

Osserviamo però che non si tratta di una dipendenza lineare.

Controllo linearità

Infatti, se per dipingere $15\,m^2$ si spendono complessivamente $s(15) = 47$ €, per dipingere una superficie doppia occorre $s(30) = 59$ € che è inferiore al doppio della spesa precedente.

La seguente questione ci offre un altro spunto interpretare un modello già pronto.

Indice BMI

Nella campagna per la prevenzione delle malattie dovute al sovrappeso, è stato recentemente individuato un metodo rapido e alla portata di tutti per *misurare l'obesità*. Si tratta del *body mass index* (*BMI*) che si ottiene come rapporto fra il peso (in chilogrammi) di un individuo e il quadrato della sua altezza (in metri)

$$BMI = \frac{peso}{(altezza)^2}$$

L'indice *BMI* è quindi misurato in kg/m^2 **.**

La soglia normalità-sovrappeso è 25 per gli uomini e 24 per le donne; mentre quella sovrappeso-obesità è 30 per gli uomini e 28,7 per le donne.

a) **Calcola il tuo BMI attuale.**
b) **Modella come varia il tuo BMI in funzione del peso.**
c) **Confronta i modelli che descrivono il BMI in funzione del peso, relativi a due individui di differente altezza.**

Quesito a)

E' lasciato al lettore.

Quesito b)

Consideriamo il caso di Maria, una ragazza alta 1,64 m (di cui non riveliamo il peso!). Tralasciamo quindi il punto a) e passiamo direttamente al punto b).

Denotato con p il peso (in kg), dalla formula del BMI si deduce

$$BMI = \frac{p}{1.64^2} \cong \frac{p}{2.69}$$

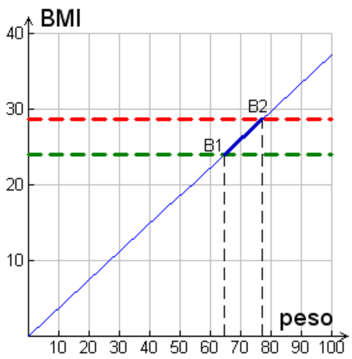
Possiamo quindi adottare

$$BMI(p) = \frac{p}{2.69}$$

come modello della relazione peso-BMI.
La funzione rappresenta una retta per l'origine (cfr. grafico a lato).
La fascia del sovrappeso

$$24 \le BMI \le 28,7$$

individua il segmento B_1B_2 sulla retta blu, i cui estremi hanno ascissa $64,5$ e $77,2$.



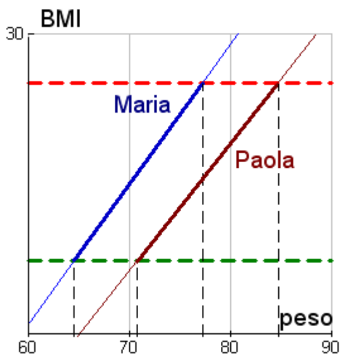
Risposta al quesito b)

Di conseguenza l'intervallo $64,5 \le p \le 77,2$ rappresenta la fascia ponderale del sovrappeso per Maria.

Quesito c)

Confrontiamo la funzione *BMI* di Maria con quella della sua amica Paola, alta 1,72 m.
E' facile stabilire che

$$BMI_{MARIA}(p) = \frac{p}{2.69} \qquad BMI_{PAOLA}(p) = \frac{p}{2.95}$$



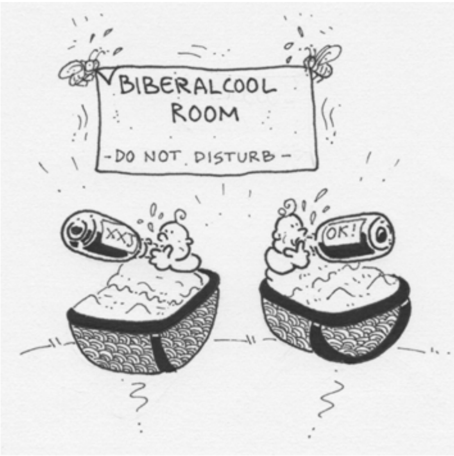
Risposta al quesito c)

Dal grafico appare evidente che la fascia ponderale del sovrappeso di Paola è più alta (e leggermente più ampia) di quella di Maria. Il suo calcolo è lasciato al lettore.

I modelli matematici di problematiche del quotidiano sono spesso adottati per azzardare previsioni sull'evoluzione probabile di un dato fenomeno. Consideriamo, ad esempio la seguente situazione.

Baby bevitori, una realtà allarmante

Nel settimanale l'Espresso (24.3.2005) è stato pubblicato un articolo che presenta alcuni dati circa la diffusione dell'uso di bevande alcoliche o superalcoliche tra i giovani.
Secondo l'autore dell'articolo, gli adolescenti italiani sono tra i più precoci bevitori europei.
Nella tabella seguente sono riportate le percentuali di bevitori, divise per sesso, fra i giovani di 14-17 anni.
Sulla base di questi dati siamo in grado di operare una previsione sull'andamento futuro del fenomeno?



% bevitori ragazzi 14-17 anni			
	1995	1998	2000
maschi	12,9	15,2	16,8
femmine	6	9,7	12,2

Fonte: Istituto Superiore di Sanità

Costruzione del modello

Innanzi tutto, riportiamo i dati della tabella in un sistema di riferimento cartesiano.
I valori si dispongono in **modo pressoché lineare**, evidenziando un *trend regolare e costante* per entrambi i sessi (Fig. 1).

Per fare previsioni è necessario stabilire l'esistenza di una **relazione funzionale** tra i dati. Infatti, se fossimo in grado di determinare una tale funzione, potremmo usarla per prevedere l'andamento del fenomeno.
In entrambi i diagrammi, i punti sembrano allineati ovvero la percentuale dei bevitori sembra aumentare in modo lineare con il tempo.

Approccio grafico

Bevitori 14-17 anni

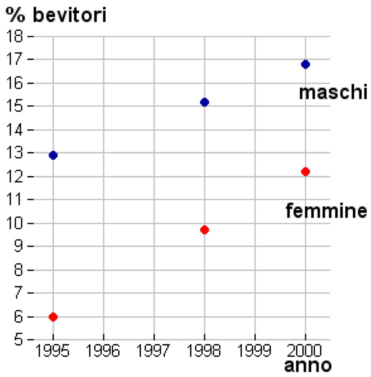


Fig.1

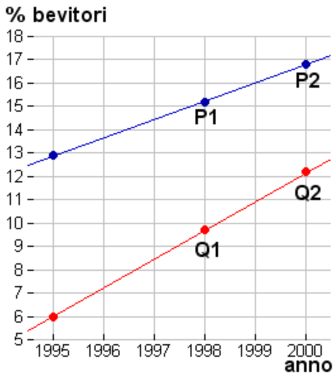


Fig.2

Questa congettura trova una prima conferma *grafica* nella Fig. 2 in cui sono state tracciate le rette *interpolanti* i dati, relativi alle ultime due rilevazioni (1998 e 2000).

Approccio analitico

Per trovare una conferma "analitica" o confutare questa congettura, determiniamo l'equazione delle due rette.
Adottando la formula della retta per due punti, si ottiene

retta P_1P_2 $\quad \dfrac{x-1998}{2}=\dfrac{y-15.2}{1.6} \quad \Leftrightarrow \quad y=0,8x-1583,2$

retta Q_1Q_2 $\quad \dfrac{x-1998}{2}=\dfrac{y-9.7}{2.5} \quad \Leftrightarrow \quad y=1,25x-2487,8$

Se valutiamo ora i valori assunti dalle due rette nel punto di ascissa 1995, otteniamo rispettivamente:

retta P_1P_2 $\quad 0,8\cdot 1995-1583,2=12,8$

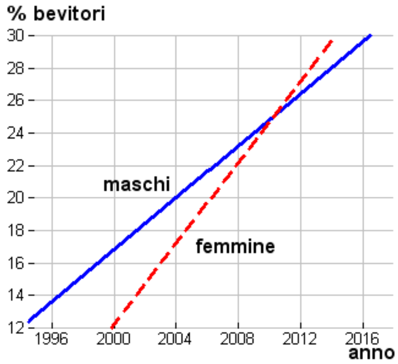
retta Q_1Q_2 $\quad 1,25\cdot 1995-2487,8=5,95$

che sono valori molto prossimi ai dati !
Possiamo quindi confermare la congettura: **i dati hanno un andamento pressoché lineare**!

Valutazioni e previsioni

Dal grafico della Fig. 2 si vede che la percentuale di bevitori maschi è costantemente maggiore di quella delle femmine, ma la retta delle ragazze ha una "pendenza superiore" a quella dei ragazzi. Questo significa che le bevitrici aumentano con una velocità superiore a quella dei bevitori e, fra qualche anno, potrebbero superarli.

In effetti il coefficiente angolare della retta Q_1Q_2 è superiore a quello della retta P_1P_2 per cui, se il fenomeno continuasse con lo stesso trend, la percentuale delle ragazze bevitrici supererebbe quella dei ragazzi.



Per stimare quando questo evento si verificherebbe, determiniamo la ascissa del punto di intersezione delle due rette.

Sistema lineare

Risolviamo quindi il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} y=0,8x-1583,2 \\ y=1,25x-2487,8 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x=2010,\overline{2}$$

Quindi, secondo la nostra previsione, il "sorpasso" si avrebbe nel 2011!

QUESITI E MODELLI

Spaghetti SpA

Il modello seguente descrive le importazioni di pasta annue (in milioni di kg) degli Stati Uniti nel periodo 1990 - 1994 (Fonte: Department of Commerce/New York Times, 5.9.1995):

$$f(t) = 145 + 26t \quad 0 \le t \le 4$$

ove t è il tempo (in anni).

Disegnare il grafico della funzione f in un opportuno sistema di riferimento cartesiano e rispondere ai quesiti:

a) Qual è stata l'entità delle importazioni di pasta del 1992?
b) Qual è l'incremento (medio) annuo di importazione?

Sweet Sweet

Il modello seguente descrive i costi giornalieri di produzione (in \$) di un tipo di caramelle della ditta Sweet Delight Candies Inc. in funzione della produzione (espressa in *pounds*):

$$C(p) = p + 300$$

(Fonte: Sullivan-Mizrahi, Mathematics Wiley, 2004).

Disegnare il grafico della funzione f in un opportuno sistema di riferimento cartesiano e rispondere ai quesiti:

a) Qual è l'entità dei costi fissi (giornalieri)
b) Valutare i costi di una produzione media giornaliera di 2.000 pounds.
c) Valutare il *costo marginale* (cioè l'aumento dei costi prodotto da un aumento unitario di produzione giornaliera).

Il nonno in palestra

Marco consiglia a suo nonno, sessantenne e troppo pigro, un'attività fisica presso la palestra dove lui è istruttore.
Il nonno accetta con riserva, il suo medico gli ha infatti consigliato di mantenere la sua frequenza cardiaca *entro i limiti di sicurezza*.
Marco si documenta e scopre che

- la frequenza cardiaca massima (FCmax) (in funzione dell'età) si può calcolare sottraendo al valore di 220 battiti al minuto l'età del soggetto, indipendentemente da sesso e razza (con un errore stimato inferiore a 10 battiti al minuto)
- l'allenamento – per essere efficace - dovrà mantenere il numero di battiti entro un intervallo compreso tra il 90% e il 70% della frequenza cardiaca max.

Per sfruttare al meglio le sue informazioni e diffonderle agli utenti della palestra, Marco decide di costruire un modello che

- descriva la frequenza cardiaca massima teorica per le persone di età compresa tra 20 e 70 anni

Individui la fascia di allenamento efficace.

Fonte: Fisiologia Applicata allo Sport W.D.McArdle;F.I. Katch;V.L. Katch, Casa Editrice Ambrosiana
Problema proposto dall'Unità locale M&R di Città di Castello, Referente Prof. Loriana Mandorla, ITIS Franchetti

Cardiofitness

Jennifer Aniston (ex moglie di Bradd Pitt) ha detto di fare pratica di cardiofitness tutti i giorni per 20 minuti, con jogging o con la civette. Non stupisce che a 40 anni ne dimostri 10 di meno.
Per chi vuole fare le cose con rigore, c'è anche un metodo scientifico: si calcola il 70% della propria età e si sottrae a 208, successivamente si calcola il 60% di quanto ottenuto.
Il risultato è il numero medio di battiti cardiaci al minuto da tenere durante gli esercizi.
Confrontare questo modello con quello discusso nell'esercizio "Il nonno in palestra".

Problema proposto dall'Unità locale M&R di Città di Castello, Referente Prof. Loriana Mandorla, ITIS Franchetti

Calura estiva

Studi recenti hanno evidenziato una relazione lineare fra la frequenza del frinire dei grilli e la temperatura. Supponiamo di aver a disposizione i seguenti dati raccolti in una sera d'estate: il grilli frinivano ad un ritmo di 140 volte al minuto quando la temperatura era di $24\ ^0C$; più tardi, quando la temperatura è scesa a $20\ ^0C$, i grilli hanno rallentato a 120 volte al minuto.

a) Modellare la temperatura in funzione della frequenza del frinire dei grilli.

b) Qual è la temperatura se il grillo frinisce ad una frequenza di 100 volte al minuto?

Modelli lineari a tratti

I modelli lineari hanno consentito di affrontare e risolvere questioni anche molto diverse fra loro.
Il mondo reale fornisce nuovi stimoli che spesso richiedono “aggiustamenti” del modello.
Procedendo per gradi, passiamo alle *funzioni lineari a tratti*.

Rent a car

Per il noleggio giornaliero di una automobile si può scegliere fra tre diverse tariffe:

	quota fissa	importo a km
A	**20 €**	**0.25 €**
B	**26 €**	**0.20 €**
C	**nessuna**	**0.50 €**

La tariffa C ha una franchigia di 50 km, ossia percorrenze inferiori a 50 km vengono conteggiate come se fossero percorsi esattamente 50 km.
Discutete la convenienza delle tre tariffe.

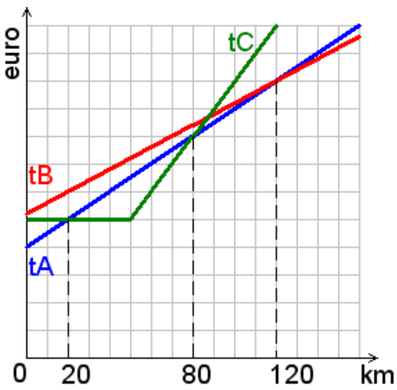
Costruzione del modello

Denotato con x il numero di chilometri percorsi, si ottiene immediatamente che le tre tariffe sono espresse rispettivamente da

$$t_A(x) = 20 + 0.25x \qquad t_B(x) = 26 + 0.20x$$

$$t_C = \begin{cases} 25 & 0 < x \leq 50 \\ 0,5x & x > 50 \end{cases}$$

Per confrontare le tre tariffe riportiamo i grafici delle funzioni t_A, t_B e t_C nello stesso sistema di riferimento cartesiano, ove sull’asse delle ascisse compare la durata del tragitto, in quello delle ordinate la spesa.



Valutiamo i punti di intersezione tra i grafici:

- intersezione tra t_A e t_C

$$\begin{cases} \begin{cases} t_C(x) = 25 \\ t_A(x) = 20 + 0,25x \end{cases} & 0 < x \leq 50 \\ \begin{cases} t_C(x) = 20 + 0,25x \\ t_A(x) = 20 + 0,25x \end{cases} & x > 50 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 20 \quad x_2 = 80$$

- intersezione tra t_A e t_B $\quad \begin{cases} t_A(x) = 20 + 0,25x \\ t_B(x) = 26 + 0,20x \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x_3 = 120$

Risposta al quesito

In conclusione si deduce che

- la tariffa A è più conveniente per percorsi inferiori a 50 km oppure compresi tra 80 km e 120 km
- la tariffa C è più conveniente per percorsi della durata compresa tra 20 km e 80 km
- la tariffa B è più conveniente per percorsi superiori a 120 km

Ancora un problema di scelta … ma questa volta dobbiamo costruire noi il modello.

Una bella nuotata

Le Piscine Comunali di Perugia offrono, tra le altre, le seguenti possi-bilità di accesso (dicembre 2005):

Tariffe piscine comunali PG

tariffa	Costo €
A - singolo accesso	6,50
B - carnet di 10 ingressi	52

Costruiamo un modello che permetta di valutare la tariffa più conveniente, in funzione al numero di ingressi che progettiamo di fare in piscina in un mese.

Costruzione del modello

Tariffa A.
Se si adotta la tariffa a singolo ingresso, la spesa per n ingressi è pari a

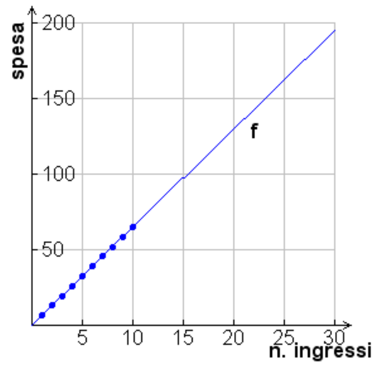
Spesa tariffa A

$$S(n) = 6.5 \cdot n \qquad n = 1, 2, \ldots, 30$$

Così il costo della piscina è una funzione lineare del numero degli ingressi.
La funzione lineare

$$f(x) = 6.5x$$

si presta bene a descrivere la spesa associata alla tariffa A (vedi grafico a lato).

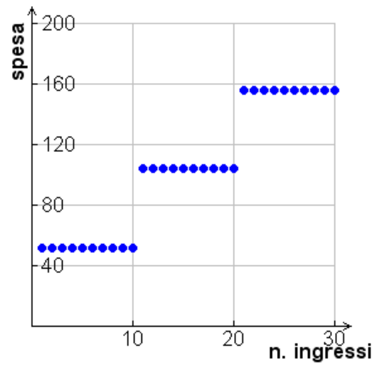


Tariffa B.
Se si adotta la tariffa a carnet, la spesa per n ingressi è pari a

Spesa tariffa B

$$S^*(n) = \begin{cases} 52 & 1 \le n \le 10 \\ 104 & 11 \le n \le 20 \\ 156 & 21 \le n \le 30 \end{cases}$$

Si tratta di una funzione a gradini (vedi grafico a lato).



Per un confronto più significativo fra le due tariffe è conveniente considerare a fianco della funzione f, la funzione supporto della tariffa B:

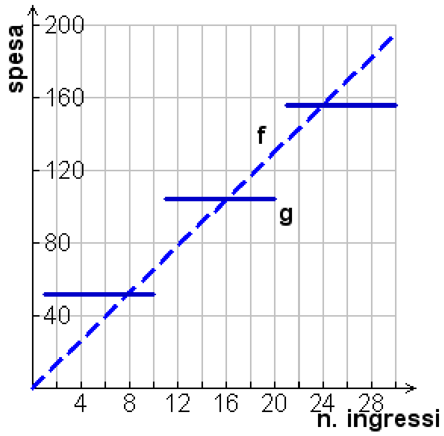
Discussione del modello

$$g(x) = \begin{cases} 52 & 0 < x \le 10 \\ 104 & 10 < x \le 20 \\ 156 & 20 < x \le 30 \end{cases}$$

Confronto fra le due spese

Il grafico delle funzioni f e g (vedi figura a lato) mette bene in luce l'esistenza di **punti di indifferenza**, in corrispondenza dei quali la spesa è indipendente dalla tariffa scelta.
Si tratta dei valori

$$n_1 = 8, \quad n_2 = 16, \quad n_3 = 24.$$

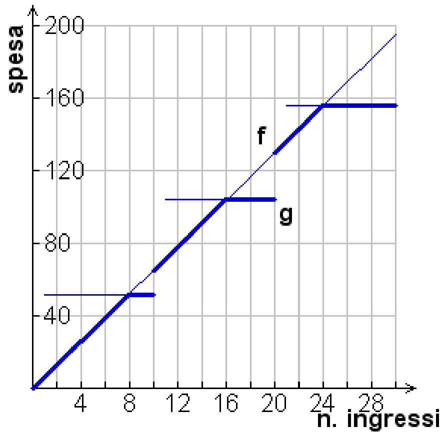


Punti di indifferenza

Il confronto fra i due grafici porta a formulare la strategia descritta dalla tabella seguente ed illustrata dal grafico alla sua destra

Prima risposta

n. ingressi	Tariffa più conveniente
$1 \le n \le 7$	A
$n = 8$	indifferente
$9 \le n \le 10$	B
$11 \le n \le 15$	A
$n = 16$	indifferente
$17 \le n \le 20$	B
$21 \le n \le 23$	A
$n = 24$	indifferente
$25 \le n \le 30$	B

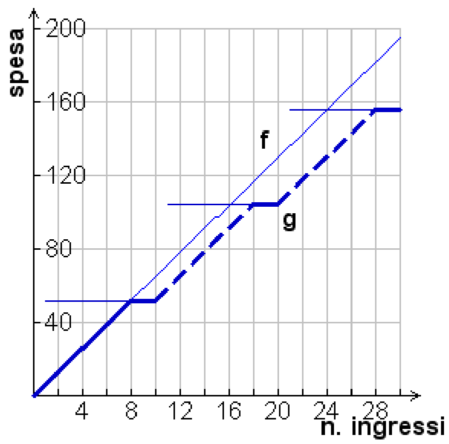


Critica alla prima risposta

Questa soluzione sembra convincente … ma se si osserva attentamente il grafico si trova una strategia migliore! La strategia vincente è quella disegnata nel grafico seguente e descritta nella tabella in basso a sinistra che si ottiene adottando, in alcuni casi, una combinazione delle due possibilità: abbonamento + biglietto singolo.

Strategia ottimale

n. ingressi	Strategia ottimale
$1 \le n \le 7$	biglietti singoli (b.s.)
$n = 8$	8 b.s. o 1 abbonamento
$9 \le n \le 10$	1 abbonamento
$11 \le n \le 17$	1 abbonamento + b.s.
$n = 18$	2 abbonamenti o 1 abbonamento + 8 b.s.
$19 \le n \le 20$	2 abbonamenti
$21 \le n \le 27$	2 abbonamenti + b.s.
$n = 28$	3 abbonamenti o 2 abbonamenti + 8 b.s.
$29 \le n \le 30$	3 abbonamenti



Modelli con funzione valore assoluto

Spesso i modelli matematici sono adottati per studiare a tavolino la migliore “strategia”, come nella questione seguente.

Itinerari attraverso l’antichità

Bevagna (PG) è una ridente cittadina di origine romana (l’antica *Mevania*) a circa 30 km da Perugia, che vanta interessanti reperti archeologici (resti di mura, teatro, terme e domus romana) e monumenti medioevali[1] (la piazza principale con una fontana e alcune chiese, le mura che la circondano …). Ogni anno si svolge a giugno il *mercato delle gaite*, che consente alla città e ai turisti di rivivere l’atmosfera medioevale per una intera settimana.
Per queste ragioni, Bevagna è meta di un turismo attento ed esigente, in continua crescita.
L’Ufficio Turistico del comune organizza *visite guidate*, condotte da esperti, ai siti di maggior interesse: (a) Piazza F. Silvestri, (b) il mosaico delle terme romane, (c) la chiesa di S. Agostino.

Ogni accompagnatore esegue l’itinerario nell’ordine: (a) – (b) – (c), tornando all’Info-point *dopo ogni visita* per consentire una maggiore dinamica del gruppo (che può variare ad ogni visita).

Le guide hanno chiesto al Dirigente di spostare la sede dell’Info-point (attualmente situata sotto il Teatro in Piazza Filippo Silvestri), per consentire di ottimizzare gli spostamenti (sia loro che dei turisti).

Il Dirigente è favorevole ad accogliere la richiesta e il Comune dispone di vari locali al piano terra lungo i Corsi Amendola e Matteotti, ma il problema è come operare la scelta.

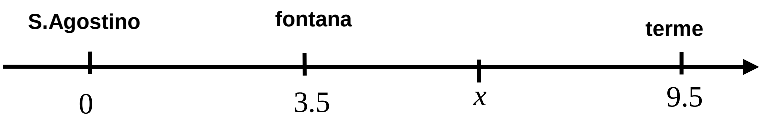
Analisi della situazione

Domanda: quale obiettivo ci prefiggiamo?

Risposta: determinare la posizione ideale per l’Info point, cioè quella (fra tutte le possibili) che consenta di minimizzare il percorso delle guide.
A questo proposito è necessario raccogliere alcuni dati.
Iniziamo stimando le distanze fra i siti interessati. Servendoci di Google-map possiamo valutare le distanze fra i siti interessati:

- distanza piazza Silvestri (fontana) – terme romane = 600 m
- distanza piazza Silvestri (fontana) – S.Agostino = 350 m

Riportiamo i dati in un opportuno sistema di riferimento

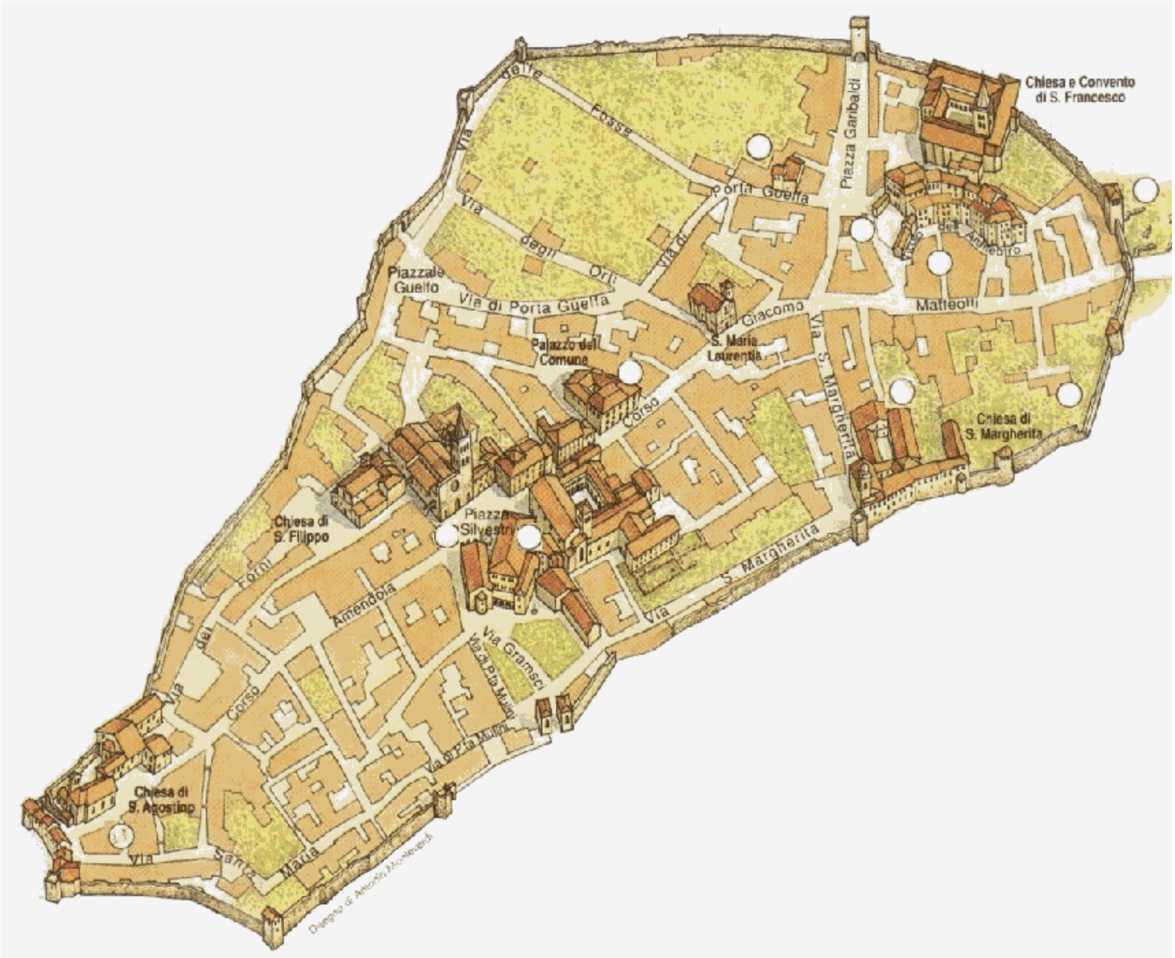


Costruzione del modello

Consideriamo un sistema di riferimento uni-dimensionale con origine nel punto corrispondente alla chiesa di S.Agostino. Denotiamo con x la coordinata dal punto (incognito) corrispondente all’Info point.

---

[1] “La perfetta scenografia medioevale della piazza intatta non esaurisce i motivi di interesse del luogo” Fonte. Guida Toring Club Italiano (1994).



Tenuto conto del piano delle visite, il percorso base delle guide è il seguente:

Percorso base

Percorso	lunghezza
IP-F.SilvestrI-IP	$2\lvert 3.5-x\rvert$
IP-S.Agostino-IP	$2x$
IP-Terme-IP	$2(9.5-x)$

Si osservi che, nel valutare la lunghezza del percorso Info point – Piazza F.Silvestri –Info point, siamo ricorsi al valore assoluto perché non è noto se l'Info point si troverà a destra o sinistra della piazza.

Lunghezza percorso

La lunghezza totale del percorso base è pertanto data da:

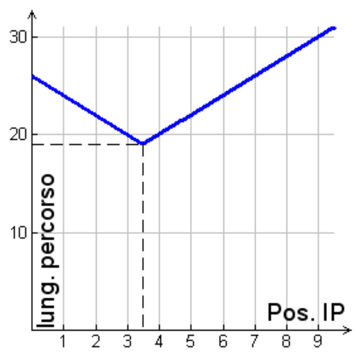
$$L(x)=2\left(9.5+\lvert 3.5-x\rvert\right)=\begin{cases}2(13-x) & 0\le x\le 3.5\\ 2(6+x) & 3.5<x\le 9.5\end{cases}$$

Risposta al quesito

Soluzione del modello

Dal grafico della funzione L (a lato) si evince che questa assume il valore minimo nel punto

$$x_{\min}=3.5$$



In altri termini, la posizione ottimale dell'Info point corrisponde alla fontana di piazza F.Silvestri!

Validazione del modello

Poiché la postazione non è ovviamente disponibile, *la soluzione del modello non è accettabile*.

Problema ***impossibile***

Pertanto il problema non ammette soluzione.

In mancanza di una soluzione (esatta) il Comune può prendere in considerazione una *soluzione approssimata*, cioè:

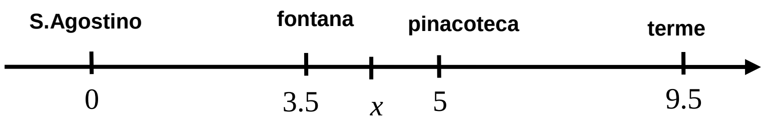
Soluzione approssimata

scegliere la postazione più vicina alla fontana fra quelle disponibili.

In conclusione la postazione attuale (a pochi metri dalla fontana) è, fra le possibili, la migliore.

Itinerari attraverso l'antichità (continua)

Ora che la situazione si è chiarita, il Dirigente si pone un'ulteriore questione.
Nell'ampliamento dell'offerta turistica è previsto di inserire a breve anche una visita guidata alla Pinacoteca Comunale. In questo caso, si renderebbe necessario operare una nuova scelta della sede dell'Info point?



Il nuovo percorso differisce dal precedente per l'aggiunta del tragitto Info point-Pinacoteca-Info point, di lunghezza

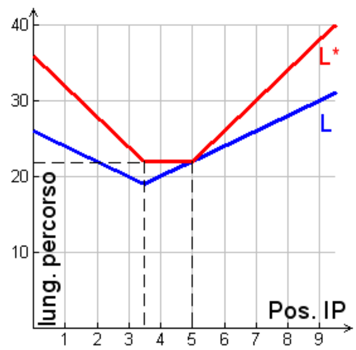
$$2|5-x|$$

La lunghezza complessiva del nuovo percorso base è quindi data da:

$$L^*(x) = L(x) + 2|5-x| = \begin{cases} 2(18-2x) & 0 \le x \le 3.5 \\ 22 & 3.5 < x \le 5 \\ 2(1-2x) & 5 < x \le 9.5 \end{cases}$$

Problema con ***infinite soluzioni***

In questo caso (vedi grafico a lato) il modello ammette *infinite soluzioni*: tutti i valori di $x \in]3.5, 5[$.



Qualunque postazione disponinile lungo Corso Matteotti dalla Piazza alla Pinacoteca (Palazzo comunale) consente di ottimizzare il percorso delle guide.

QUESITI E MODELLI

Stangata parcheggi

Dal 1.1.2010 sono entrati in vigore a Perugia le nuove tariffe dei parcheggi gestiti dalla società SIPA, che prevedono un aumento del 35%.
Nella tabella seguente sono riportate le nuove tariffe per due dei parcheggi principali.
Modellare la spesa in funzione della durata della sosta e dell'ora di arrivo.
Discutere la convenienza delle varie opportunità.

Tariffa €	**1^0 ora**	**2^0 ora e successive**	**forfetaria notturna 20.00-02.00**
Mercato coperto	1,70	2,25	---
Piazza Partigiani	1,35	1,70	2,00
Viale Pellini	1,35	1,70	---
Piazzale Europa	0,95	1,35	2,00

Dichiarazione dei redditi

Nella tabella seguente è riportata l'aliquota a scaglioni adottata dal Governo per la Dichiarazione dei redditi 2008

Redditi 2000 Calcolo dell'IRPEF (in euro)	
REDDITO	**Aliquota**
fino a 15.000	23
oltre 15.001,00 e fino a 28.000,00	27
oltre 28.001,00 e fino a 55.000,00	38
oltre 55.001,00 e fino a 75.000,00	41
oltre 75.001,00	43

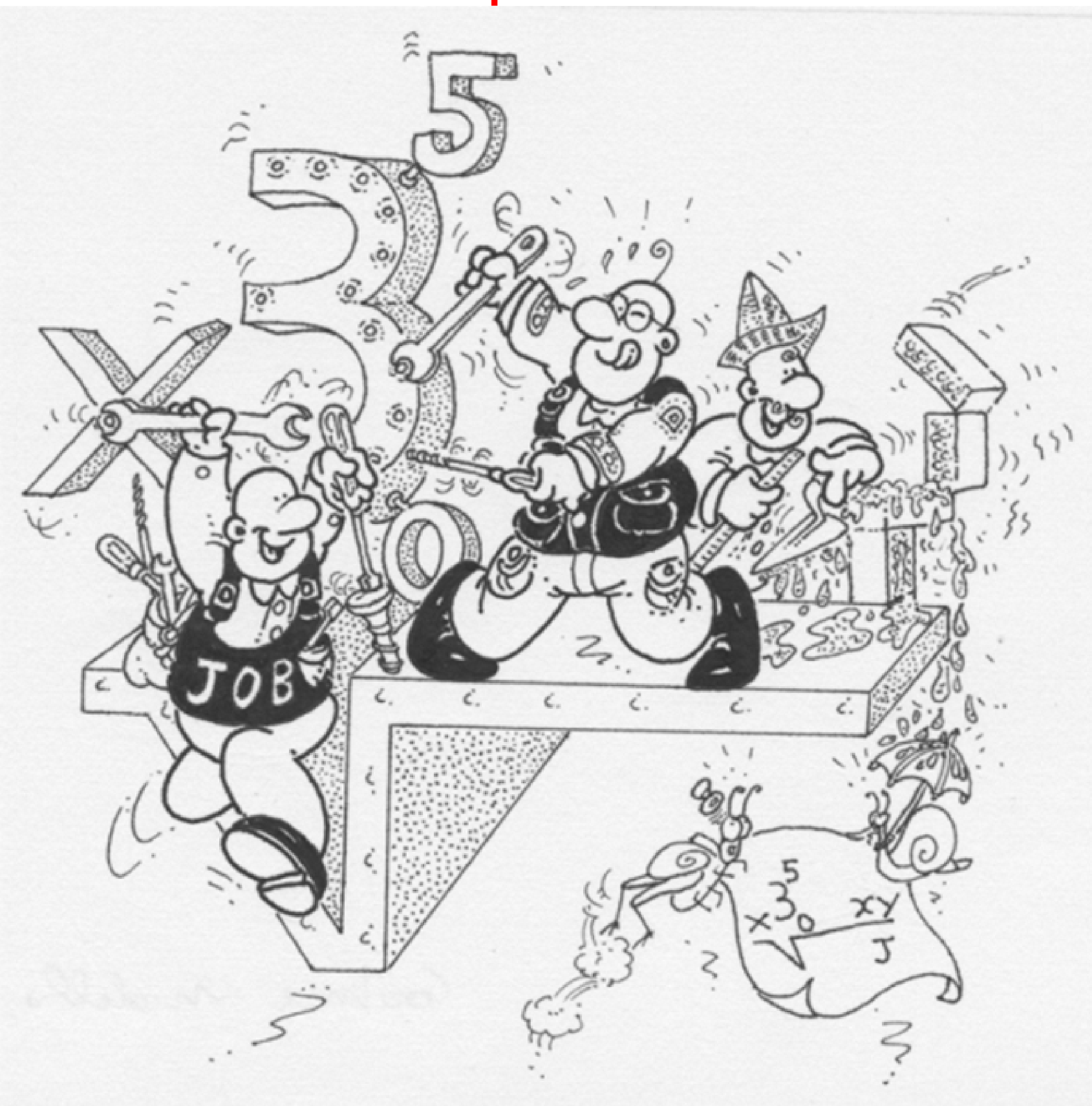
Determinare le funzioni reddito-aliquota e reddito-imposta (legge di definizione e grafico).

Matematica&Realtà

Percorso C

Modelli elementari della realtà: dai modelli lineari ai modelli non lineari

Unità didattica C2- primi modelli non lineari



a cura di

Primo Brandi – Anna Salvadori

Dipartimento di Matematica e Informatica

Università degli Studi di Perugia

Matematica&Realtà

Percorso C

Modelli elementari della realtà: dai modelli lineari ai modelli non lineari

Unità didattica C2- primi modelli non lineari

A cura di
Primo Brandi – Anna Salvadori

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università degli Studi di Perugia

Introduzione

Il percorso C propone un'introduzione elementare alla modellizzazione matematica della realtà.

Quando si vuole comprendere un fenomeno o si deve affrontare una problematica del mondo reale, può essere conveniente costruire un "prototipo virtuale" sul quale operare delle simulazioni: **il modello matematico**.

Un po' come avviene quando il sarto, prima di tagliare la stoffa, disegna e lavora sul modello di carta dell'abito o l'ingegnere che fonda il suo intervento sulla base del progetto.

Il modello matematico consente un esame oggettivo della situazione che facilita la comprensione del problema, aiuta nella valutazione di eventuali scelte e permette anche di … azzardare previsioni!

Come vedremo con alcuni esempi, può essere conveniente ricondursi ad un modello matematico anche per affrontare questioni spicciole della vita quotidiana e si possono costruire modelli matematici avendo a disposizione strumenti elementari (la matematica di base appresa a scuola).

Dopo aver affrontato nella unità didattica C1 lo studio di modelli lineari, proponiamo qui alcuni **modelli non lineari.**

I bozzetti umoristici sono di Luigi Bluffi

Referenze

Riferimenti strettamente collegati

[1] P.Brandi-A.Salvadori, Matematica&Realtà, Introduzione alla modellizzazione matematica con strumenti elementari, Università degli Studi di Perugia (2010)
[2] P.Brandi-A.Salvadori, Prima di iniziare (Conoscenze e competenze Matematiche di base per l'Università) 2009-10
[3] P.Brandi-A.Salvadori, Modelli matematici elementari, Ed. B.Mondadori (2004)

I Dossier M&R di Alice&Bob con contributi delle varie Unità Locali M&R

Sistemi lineari. Alice e Bob, 6-7 (2008) 29-33
Modelli lineari a tratti. Alice e Bob, 5 (2008) 21-28
Primi modelli lineari. Alice e Bob, 4 (2007) 21-28

I progetti di approfondimento svolti dai ragazzi partecipanti ai Laboratori M&R con la guida dei loro Tutor e presentati al convegno annuale Esperienze a confronto.

Modelli quadratici

Iniziamo con la "lettura" e l'interpretazione di un modello matematico già "pronto".

Trattamento rifiuti tossici

Il costo del trattamento dei rifiuti tossici per l'eliminazione del PCP (pentaclorofenolo) aumenta al crescere della quantità smaltita, in modo *superlineare*. Un possibile modello del costo giornaliero (in dollari) di questo trattamento è dato dalla espressione:

$$C = C(q) = 2000 + 100\,q^2$$

ove q è la riduzione della tossicità, espressa in *kg* di PCP eliminati giornalmente.

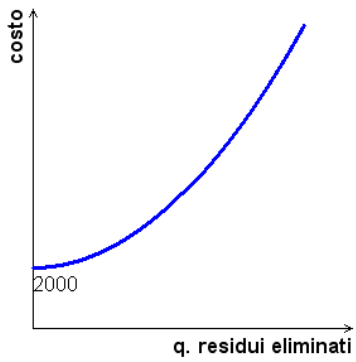
I sussidi governativi in USA ammontano a 500 \$ giornalieri, per ogni *kg* eliminato.

Determiniamo il costo del trattamento, a netto del sussidio, in funzione della quantità di residui tossici eliminati.

Valutazione del modello

Costo in funzione della quantità smaltita

Come era naturale aspettarsi, C è una funzione crescente, cioè più *kg* di residui tossici si smaltiscono più l'intervento è costoso, anche se l'aumento dei costi **non è proporzionale** alla quantità di residui smaltiti; infatti la funzione non è lineare, ma **super-lineare,** precisamente quadratica (cfr. grafico a lato).
Il valore C(0)=2000 rappresenta i **costi fissi** (giornalieri), che sono indipendenti dalla quantità smaltita e sono presenti anche se un determinato giorno non si dovesse o potesse operare.



Costruzione del modello

Costo al netto contributi

Modelliamo ora il *costo al netto dei contributi governativi*. La funzione corrispondente $N = N(q)$ si ottiene sottraendo i contributi giornalieri alla funzione costo:

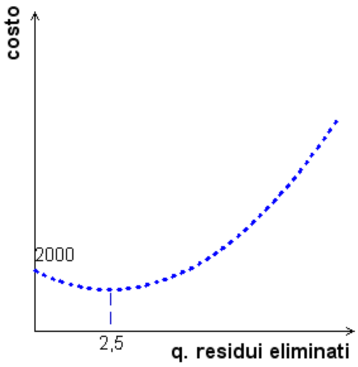
$$N = 2000 + 100\,q^2 - 500\,q\,.$$

Anche la funzione N rappresenta una parabola (cfr. grafico a lato). I costi fissi sono invariati:

$$N(0) = 2000$$

ma la funzione **non è crescente**.

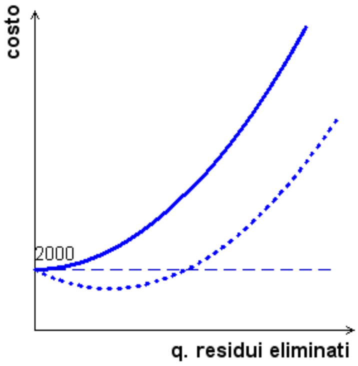
Il costo minimo si ha in corrispondenza all'ascissa del vertice della parabola: $q = 2{,}5$.



Valutazioni sulla base del modello

Il diagramma a lato, in cui sono sovrapposti i due grafici delle funzioni C ed N, mostra chiaramente il vantaggio economico dei contributi governativi.

Grazie al contributo, la spesa per lo smaltimento di rifiuti inferiori ai 5 *kg* è addirittura minore dei costi fissi!



Una situazione in cui ci verrà richiesto di costruire un modello.

Lotta al rumore

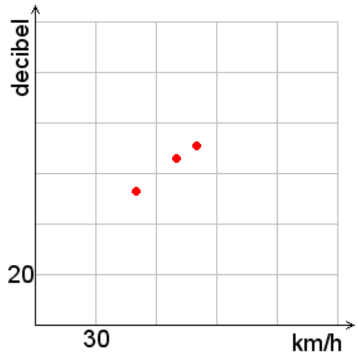
Il Parlamento Europeo ha dichiarato guerra … al rumore! Infatti ha stilato varie direttive sulla lotta al rumore, fissando i valori massimi di emissione, fra l'altro, per aerei civili , autoveicoli, motocicli, elettrodomestici, attrezzi per l'edilizia o il giardinaggio. Particolare attenzione è stata prestata al rumore del traffico stradale a causa dei notevoli inconvenienti che ne derivano per l'uomo.

Per le autovetture il valore limite del livello sonoro ammissibile già fissato a 77 dB(A), dal 1995/96 è stato ridotto a 74 dB(A).Nella tabella a lato sono riportati i valori di rumorosità di un'autovettura sportiva corrispondenti a diverse velocità.
Supposto che la rumorosità sia funzione quadratica della velocità, stabiliamo se la vettura è conforme alla normativa europea.

Velocità (km/h)	50	70	80
Rumorosità (decibel)	53	66	71

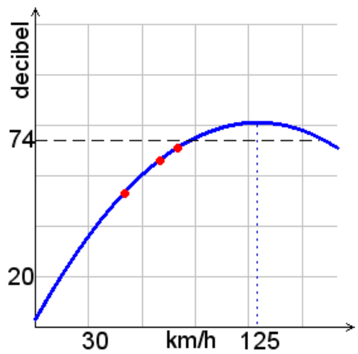
Costruzione del modello
.

Se riportiamo i dati in un opportuno sistema di riferimento (velocità – rumorosità) si ottiene il diagramma a lato. L'andamento dei dati sembra effettivamente suggerire una evoluzione del fenomeno di tipo quadratico.
In altri termini la funzione $r = r(v)$, che esprime la rumorosità in funzione della velocità, può ragionevolmente essere descritta da un arco di parabola.
Considerata l'equazione della parabola



$$r = av^2 + bv + c$$

determiniamo i valori del tre parametri a, b, c imponendo il *passaggio* per i tre punti dati (curva *interpolante*):



$$\begin{cases} 2500a + 50b + c = 53 \\ 4900a + 70b + c = 66 \\ 6400a + 80b + c = 71 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1/200 \\ b = 5/4 \\ c = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad r = r(v) = -\frac{1}{200}v^2 + \frac{5}{4}v + 3$$

Descrizione del modello

Secondo il modello il rumore cresce con la velocità sino ad una certa soglia, esattamente (ascissa del vertice della parabola)

$$-\frac{b}{2a} = 125\, km/h$$

poi diminuisce.

Risposta al quesito

Il livello di rumore corrispondete a 125 km/h (ordinata del vertice della parabola) è

$$r = r(125) = 81{,}125 \quad \text{decibel}$$

L'auto non rispetta quindi la normativa!
Precisamente, possiamo determinare l'intervallo di velocità in cui il rumore è superiore al massimo consentito risolvendo la disequazione

$$r(v) > 74 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{200}v^2 + \frac{5}{4}v - 71 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 5(25 - \sqrt{57}) < v < 5(25 + \sqrt{57})$$

Poiché

$$5(25-\sqrt{57})\cong 87,25 \qquad 5(25-\sqrt{57})\cong 162,75$$

l’auto non rispetta la normativa quando si muove ad una velocità superiore a 87 km/h (si tenga conto che il limite massimo di velocità in Italia è di 130 km/h).

Proviamo ora a *leggere* e interpretare un modello quadratico già pronto.

Spazio di frenata

Il Ministero dei Trasporti ha fornito un modello semplificato dello spazio di arresto di un veicolo in funzione della velocità, nelle varie condizioni di fondo stradale.
Trascurando lo spazio di reazione, lo spazio di frenata (valutato in metri) **è espresso dalla formula**

$$s_f(v) = \frac{v^2}{250f}$$

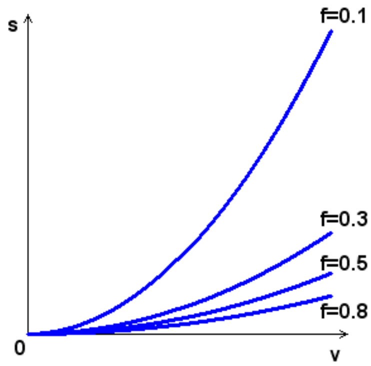
ove v **è la velocità** (in km/h) **ed** f **è il coefficiente di aderenza del fondo stradale, fornito dalla tabella seguente**

Coefficienti di aderenza	f
Strada asfaltata asciutta con fondo granuloso	**0.8**
Strada asfaltata ruvida	**0.6**
Strada asfaltata liscia	**0.5**
Strada asfaltata bagnata	**0.4**
Strada con fanghiglia	**0.3**
Strada ghiacciata	**0.1**

Discussione del modello

Secondo il modello, lo spazio di arresto dipende in modo quadratico dalla velocità.
Nel grafico a lato sono riportati i grafici delle funzioni

$$s_f = s_f(v)$$



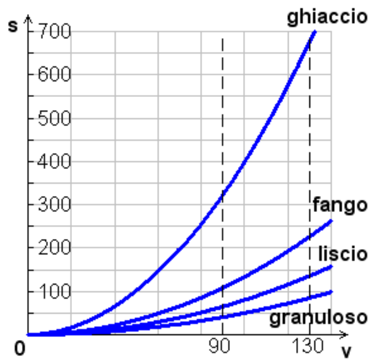
Discussione qualitativa

corrispondenti a diversi valori del parametro f .
Si tratta di un fascio di rami di parabola con vertice nell'origine degli assi. Al diminuire del coefficiente di aderenza le parabole divengono più ripide.

Valutando quantitativamente lo spazio (in metri) necessario per frenare, si ottengono, ad esempio, i segueti valori

Valutazione quantitativa

fondo	$v = 90$ km/h	$v = 130$ km/h
granuloso	**40,5**	**84,5**
ruvido	**54**	**112,6**
liscio	**64,8**	**135,2**
bagnato	**81**	**169**
fanghiglia	**108**	**225,3**
ghiaccio	**324**	**675**



Passando da $v = 90$ km/h a $v = 130$ km/h, lo spazio necessario all'arresto viene più che raddoppiato.

Passiamo ora ad una trattazione più accurata della distanza di sicurezza.

Distanza di sicurezza

Per valutare la distanza di sicurezza fra due veicoli è necessario sommare lo spazio di reazione e quello di frenata. Lo spazio di reazione è quello percorso dal veicolo durante il tempo di reazione del conducente, cioè il tempo che intercorre tra l'istante in cui il conducente percepisce il pericolo e quello in cui interviene sul pedale del freno. Lo spazio di frenata è quello percorso dal veicolo sotto la piena azione del freno.

Denotata con v **la velocità del veicolo** (in km/h),

e con t **il tempo di reazione** (in secondi)**, lo spazio di reazione** (in metri) **è pari a**

$$s_r(v) = \frac{1}{3,6}\, t \cdot v$$

Tenuto conto della formula già vista per lo spazio di frenata (cfr. C2.2), lo spazio di arresto è descritto dal modello

$$s_a(v) = s_r(v) + s_f(v) = \frac{1}{3,6}\, t \cdot v + \frac{v^2}{250\, f}$$

in cui compaiono due parametri, il coefficiente di aderenza f **e il tempo di reazione** t**.**

Il tempo di reazione può variare fra 1 e 2 secondi (www.aci.it)

Coefficienti di aderenza	f
Strada asfaltata asciutta con fondo granuloso	**0.8**
Strada asfaltata ruvida	**0.6**
Strada asfaltata liscia	**0.5**
Strada asfaltata bagnata	**0.4**
Strada con fanghiglia	**0.3**
Strada ghiacciata	**0.1**

Discussione del modello

I Caso parametri fissi

In un primo caso, assumiamo un tempo di reazione $t = 1,5$ secondi e il fondo stradale granuloso.

Calcoliamo come variano lo spazio di reazione, lo spazio di frenata e quello di arresto al variare della velocità

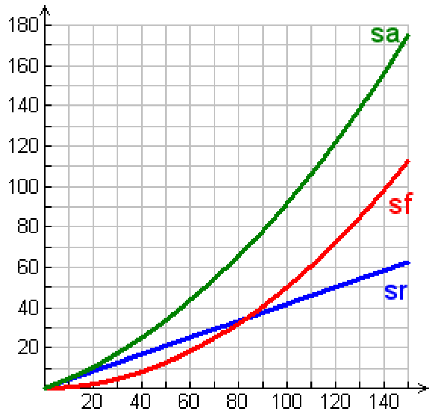
Valutazione numerica

velocità (km/h)	**Spazio di reazione** (m)	**Spazio di frenata** (m)	**Spazio di arresto** (m)
30	**8,33**	**4,5**	**12,83**
60	**16,67**	**18**	**34,67**
90	**25**	**40,5**	**65,5**
120	**33,33**	**72**	**105,33**

Si osservi che a 30 km/h e a 60 km/h lo spazio di reazione è superiore a quello di frenata.

Valutazione grafica

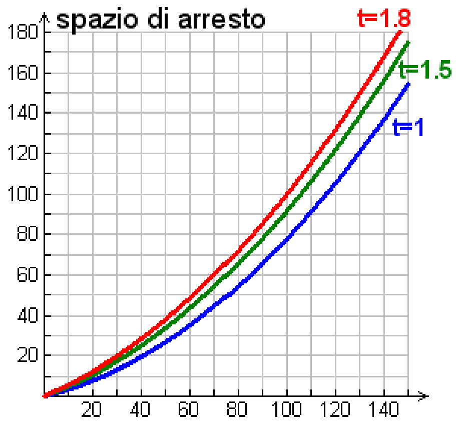
Potremmo operare una *valutazione qualitativa* tracciando il grafico delle tre funzioni $s_r(v)$ $s_f(v)$ $s_a(v)$

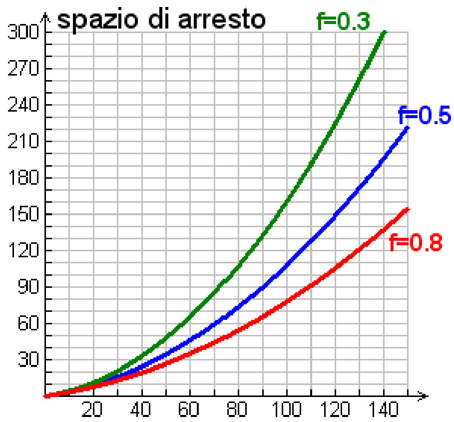


II Caso

Servendoci di un softwer grafico, possiamo valutare qualitativamente come varia lo spazio di arresto in funzione dei parametri (cfr. grafici seguenti).

- Figura di sinistra: curve spazio di arresto **al variare del tempo di reazione** ($t = 1, 1.5, 1.8$) nel caso di un fondo stradale granuloso ($f = 0.8$)
- Figura di destra: curve spazio di arresto **al variare del fondo stradale** nel caso di un tempo di reazione pari a 1 secondo





Spazio di frenata (continua)

Dalla strisciata lasciata sull'asfalto nel corso di una frenata, la Polizia stradale può dedurre la velocità del veicolo?

Discussione del modello

Ricordiamo che lo spazio di frenata è espresso dalla formula

$$s_f(v) = \frac{v^2}{250f}$$

ove f è il coefficiente di aderenza del fondo stradale e v è la velocità.

Nota la lunghezza dello spazio di frenata s, vogliamo risalire alla velocità.
Dobbiamo quindi risolvere l'equazione seguente (nell'incognita v)

$$s = \frac{v^2}{250f}$$

ove s e f sono dati noti.
Si tratta quindi di un'equazione di II grado, a coefficienti letterali.

Un primo caso particolare

Iniziamo con un caso particolare: assumiamo un coefficiente di aderenza $f = 0.6$

(strada ruvida) e supponiamo di avere rilevato una strisciata lunga $100\,m$.
L'equazione diventa a coefficienti numerici

$$100 = \frac{v^2}{250 \cdot 0.6} \quad \Leftrightarrow \quad v^2 = 15000$$

Due soluzioni

ed ammette due radici (reali distinte)

$$v^2 = 15000 \quad \Rightarrow \quad v = \pm\sqrt{15000}$$

Una sola significativa

Naturalmente, visto il significato della variabile, siamo interessati solo alla soluzione positiva

$$v = \sqrt{15000}$$

Valore approssimato

Valutando un'approssimazione razionale alla seconda cifra decimale, si ha

$$v \cong 122.47$$

Conclusione

Possiamo quindi affermare che, al momento della frenata, il veicolo stava procedendo a circa $122\,km/h$!

Caso generale

Possiamo ora affrontare la soluzione dell'equazione nel caso generale

$$s = \frac{v^2}{250 f} \quad \Leftrightarrow \quad v^2 = 250 \cdot f \cdot s$$

si tratta di un'equazione di II grado, con coefficienti letterali.
Poiché il termine a secondo membro è positivo, l'equazione ammette due radici (reali distinte)

$$v = \pm\sqrt{250 \cdot f \cdot s}$$

Focalizziamo l'attenzione sulla soluzione positiva

$$v = \sqrt{250 \cdot f \cdot s} \cong 15.8\sqrt{f} \cdot \sqrt{s}$$

Assumendo un fondo stradale asfaltato, possiamo limitarci ai seguenti valori del coefficiente di aderenza

Coefficienti di aderenza su strada afaltata	f
Asciutta e granulosa	**0.8**
Ruvida	**0.6**
Liscia	**0.5**
Bagnata	**0.4**

Tenuto conto che

$$0.4 \le f \le 0.8 \quad \Rightarrow \quad 0.63 < \sqrt{f} < 0.89$$

si deduce che

$$9.954\sqrt{s} < v < 14.062\sqrt{s}$$

QUESITI E MODELLI

Guida con l'Ipod

Secondo una stima recente è in continuo aumento il numero di giovani (tra i 16 e i 24 anni) che ascoltano musica mediante auricolari mentre sono alla guida. La percentuale era del 3% nel 2000, è salita al 5% nel 2003 ed ha raggiunto l' 8% nel 2005. Fonte:L'Espresso, 2.4.2006
Descrivere il fenomeno adottando un modello di evoluzione di tipo qudratico.
Sulla base del modello
- stabilire in quale anno la percentuale di ragazzi (che guidano ascoltando musica) raggiungerà il 10 %
- prevedere la percentuale del 2010.

Traffico in internet

Il traffico giornaliero ("contatti al giorno") su OhaganBooks.com sembra dipendere dalla somma mensile investita per pubblicizzare il sito con banner sui più noti portali internet. Sulla base di un'indagine di mercato, è stato elaborato il seguente modello

$$h = h(c) = -0.000005c^2 + 0.085c + 1750$$

ove h è il numero medio di contatti al giorno sul sito Web e c è la spesa mensile in pubblicità.

a) Secondo il modello, quale spesa mensile in pubblicità determina il maggiore volume di traffico nel sito? Qual è l'entità di questo volume?
b) Il modello consente di prevedere una diminuzione del traffico se la spesa in pubblicità aumenta oltre un certo limite. Perché? Qual è il limite oltre il quale la spesa diventa controproducente?

Pallone in aria

L'altezza di un pallone lanciato verso l'alto (in funzione del tempo) è data dall'espressione

$$s(t) = v_0 t - \frac{g}{2} t^2$$

dove v_0 è la velocità iniziale e g è l'accelerazione di gravità.

a) Per quanto tempo il pallone è in aria prima di toccare terra?
b) Dopo quanto tempo raggiunge la massima altezza?
c) Quanto è l'altezza massima che raggiunge?

Pay TV

Una pay TV ha 20000 abbonati che pagano 80 € di canone mensile. Secondo una indagine demoscopia, ogni riduzione di 0,10 € del canone permetterebbe di acquisire 50 nuovi clienti.
Determinare il canone che ottimizza il ricavo.

Dimensioni di una scatola

Si vuole costruire una scatola di legno a base quadrata, della capienza di 54 cm^3, con uno del lati di vetro per permettere di controllare il contenuto senza aprire la scatola. Determinare le dimensioni che minimizzano il costo di produzione assunto che il rapporto fra i prezzi unitari di vetro e legno sia pari a 3/5.

Modelli iperbolici

Ritorniamo su due questioni già trattata nell'Unità didattica C1.

Acqua *salata*

Nella cittadina di Maple Grove (USA) i costi per il consumo dell'acqua potabile – erogata dalla riserva municipale – sono calcolati sommando una quota fissa e una quota variabile, proporzionale ai consumi, secondo la formula

$$C(x) = 0.025x + 65.$$

Valutiamo il costo medio.

Costruzione del modello

Il costo medio si ottiene dividendo il costo totale per il consumo:

$$C_m(x) = \frac{C(x)}{x} = 0.025 + \frac{65}{x}.$$

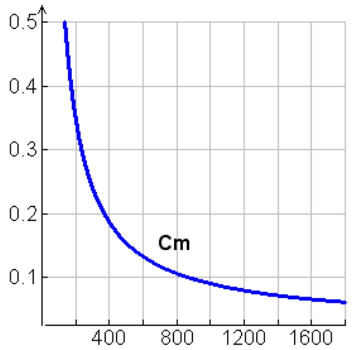
Costo medio annuo

Il costo medio è descritto da una funzione iperbolica decrescente:

Discussione del modello

più si consuma, meno si paga in media.

Aumentando i consumi si ha infatti un abbattimento della spesa fissa iniziale che viene ripartita sui consumi.



Tariffe piscina

Costruire un modello che permetta di valutare il *costo medio* ad ingresso, a seconda dell'alternativa scelta, fra le seguenti offerte delle Piscine Comunali di Perugia (dicembre 2005):

Tariffe Piscine Comunali PG	
singolo accesso	6,50
abbonamento mensile	55

Costruzione del modello

Il costo medio si ottiene dividendo il costo complessivo per il numero di ingressi. Precisamente, posto x il numero di ingressi in piscina e denotata con $s(x)$ la spesa complessiva, il costo medio per ciascun ingresso è pari a

$$s_m(x) = \frac{s(x)}{x}.$$

Valutiamo il costo medio mensile, affrontando il problema separatamente per ciascuna delle due alternative di acquisto:

a) biglietti a singolo accesso
b) abbonamento mensile.

Ingressi singoli

La spesa per l'acquisto di x ingressi a biglietto singolo è pari a (cfr. Fig. 4.3)

$$s(x) = 6.5x$$

Spesa complessiva

pertanto

$$s_m(x) = \frac{s(x)}{x} = 6.5.$$

Costo medio a ingresso

Come era ovvio aspettarsi, il costo medio è esattamente pari al costo di ogni singolo biglietto.

Conclusioni

La funzione costo medio è in questo caso costante (vedi Fig.4.4).

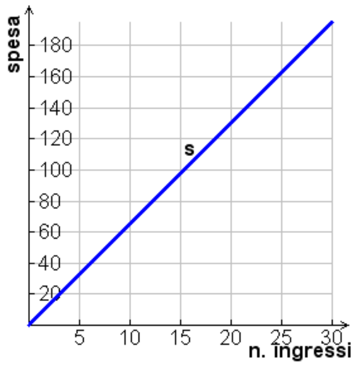


Fig.4.3

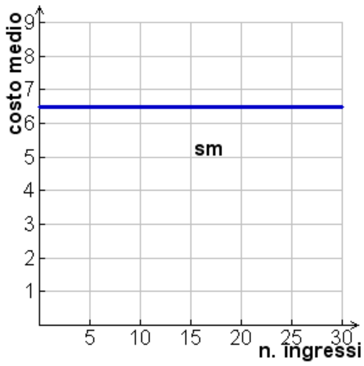


Fig.4.4

Abbonamento

Sottoscrivendo un abbonamento mensile a 55 €, il costo medio è dato dalla funzione

$$s_m(x) = \frac{55}{x}$$

Costo medio a ingresso

che rappresenta un ramo di iperbole, il cui grafico è quello in basso a sinistra.

Conclusioni

Il costo medio è una funzione decrescente. Il massimo (55 €) è assunto in corrispondenza al primo ingresso, successivamente il costo medio diminuisce gradatamente perché la somma spesa si ammortizza a mano a mano che aumentano gli ingressi effettuati. Il minimo valore, pari a circa 1.80 €/ingresso, si raggiunge in corrispondenza al trentesimo ingresso.