

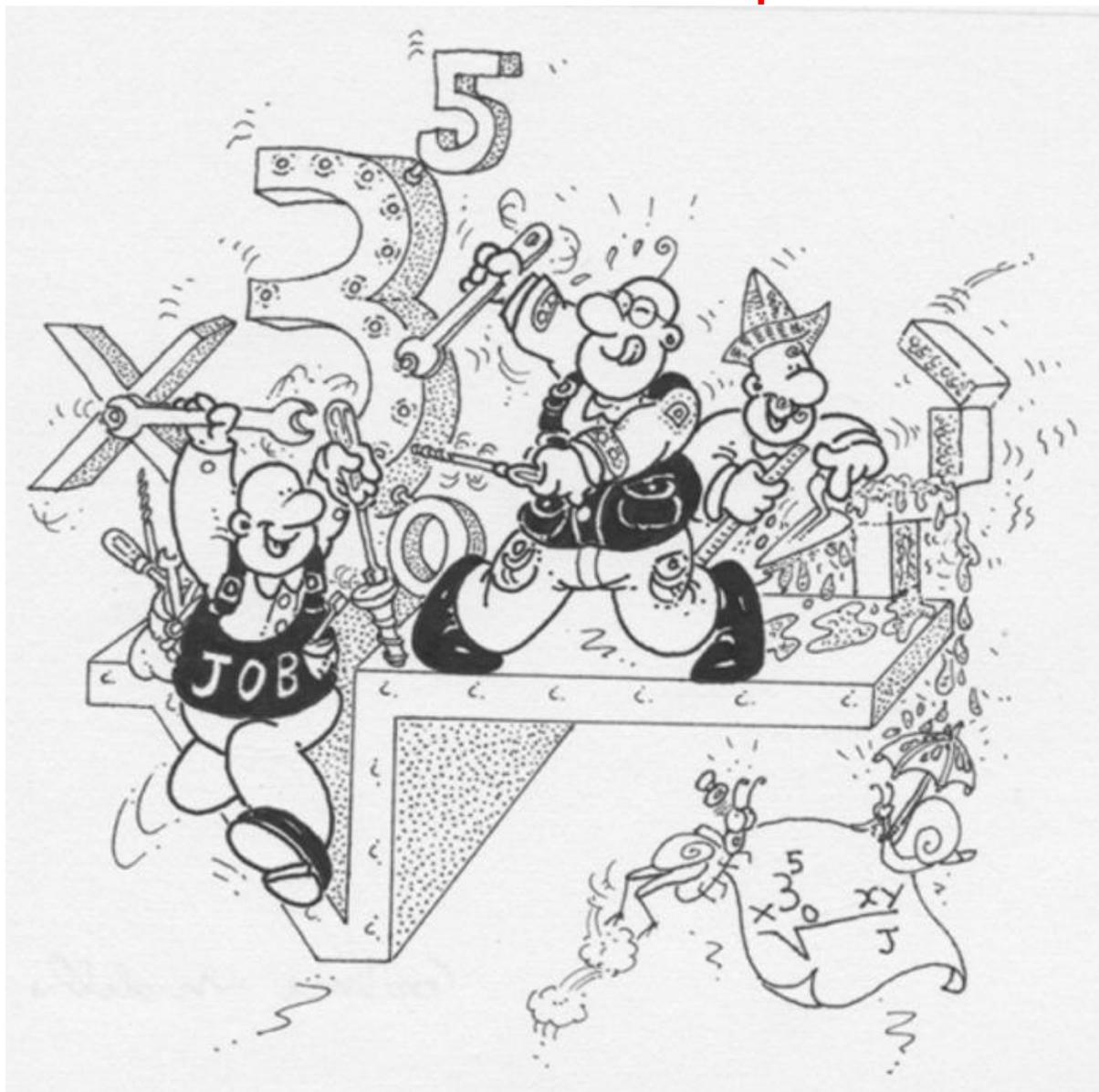


Matematica&Realtà

Percorso A

Le funzioni elementari strumento base della
modellizzazione del mondo reale

Unità didattica A1- modelli esponenziali



a cura di

Primo Brandi – Anna Salvadori
Dipartimento di Matematica e Informatica
Università degli Studi di Perugia



Matematica&Realtà

Percorso A

Le funzioni elementari strumento base della modellizzazione del mondo reale

Unità didattica A1- modelli esponenziali

A cura di
Primo Brandi – Anna Salvadori

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università degli Studi di Perugia

Introduzione

Il percorso A prosegue l'introduzione elementare alla modellizzazione matematica della realtà iniziata nel percorso M.

Quando si vuole comprendere un fenomeno o si deve affrontare una problematica del mondo reale, può essere conveniente costruire un "prototipo virtuale" sul quale operare delle simulazioni: **il modello matematico**.

Un po' come avviene quando il sarto, prima di tagliare la stoffa, disegna e lavora sul modello di carta dell'abito o l'ingegnere che fonda il suo intervento sulla base del progetto.

Il modello matematico consente un esame oggettivo della situazione che facilita la comprensione del problema, aiuta nella valutazione di eventuali scelte e permette anche di ... azzardare previsioni!

Come vedremo con alcuni esempi, può essere conveniente ricondursi ad un modello matematico anche per affrontare questioni spicciole della vita quotidiana e si possono costruire modelli matematici avendo a disposizione strumenti elementari (la matematica di base appresa a scuola).

In questa prima unità didattica affrontiamo lo studio dei **modelli esponenziali**.

I bozzetti umoristici sono di Luigi Aluffi

Referenze

Riferimenti strettamente collegati

- [1] P.Brandi-A.Salvadori, Matematica&Realtà, Introduzione alla modellizzazione matematica con strumenti elementari, Università degli Studi di Perugia (2010)
- [2] P.Brandi-A.Salvadori, Prima di iniziare (Conoscenze e competenze Matematiche di base per l'Università) 2009-10
- [3] P.Brandi-A.Salvadori, Modelli matematici elementari, Ed. B.Mondadori (2004)

I Dossier M&R di Alice&Bob con contributi delle varie Unità Locali M&R

P.Brandi - A.Salvadori, *Può la matematica predire il futuro?* www.studiumbri.it 0 (2009)

P.Brandi - A.Salvadori, *Progressioni*. Alice e Bob, 8-9 (2008) e 10 (2009)

P.Brandi - A.Salvadori, *I modelli matematici entrano a scuola, ... M&R li prende per mano*. Alice e Bob, 19 (2010)

I progetti di approfondimento svolti dai ragazzi partecipanti ai Laboratori M&R con la guida dei loro Tutor e presentati al convegno annuale Esperienze a confronto.

AA.VV. Matematica&Realtà, Esperienze a confronto DVD (aggiornamento 2010)

Primi modelli di crescita e decadimento

Iniziamo con un modello "base" di accrescimento.

Mitosi cellulare

La cellula è l'unità fondamentale costituente i tessuti degli organismi viventi. Come ogni entità vivente, tende a svilupparsi, ad invecchiarsi e ad essere sostituita da cellule più giovani. Tale rinnovo avviene mediante complessi processi di suddivisione cellulare.

La mitosi è il processo mediante il quale, per fasi successive, da una cellula *diploide* (con patrimonio di cromosomi completo) se ne formano due con lo stesso patrimonio cromosomico. Ciò è possibile in quanto nella prima fase di mitosi il DNA raddoppia e ogni cromosoma si duplica.

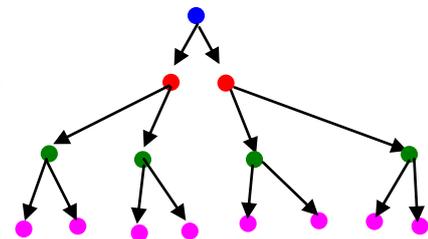
L'evoluzione dell'accrescimento cellulare mediante il fenomeno della mitosi può essere descritto mediante un modello matematico.



Costruzione del modello Modelliamo il numero delle cellule presenti in un processo di accrescimento per mitosi.

Iniziamo con una rappresentazione grafica dell'accrescimento cellulare a partire da una cellula madre (cfr. schema a lato).

approccio grafico



Descriviamo ora formalmente l'evoluzione a partire da N_0 cellule.

A questo proposito, indichiamo con N_k il numero delle cellule presenti allo stadio k (cfr. tabella a lato).

approccio formale

Il processo di duplicazione cellulare avviene raddoppiando il numero delle cellule presenti ad ogni stadio,

stadio	n. cellule
0	N_0
1	N_1
2	N_2
⋮	⋮
k	N_k

pertanto l'evoluzione è descritta dal processo iterativo seguente

Processo iterativo

$$(1) \quad \begin{cases} N_0 & \text{start} \\ N_k = 2 \times N_{k-1} & k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

In altri termini è costante (pari a 2) il rapporto fra il numero delle cellule presenti in due stadi consecutivi. Pertanto la sequenza

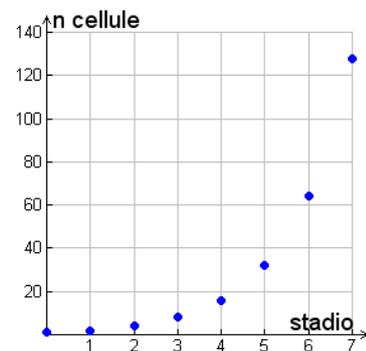
$$N_0, N_1, N_2, \dots, N_k$$

Progressione geometrica

costituisce una **progressione geometrica** di ragione $m = 2$.

Dalla (1) si deduce

$$\begin{aligned} N_0 & \text{ start} \\ N_1 & = 2N_0 \\ N_2 & = 2N_1 = 2 \times 2N_0 = 2^2 N_0 \\ & \vdots \\ N_k & = 2N_{k-1} = 2^k \times N_0 \end{aligned}$$



che fornisce una **formula chiusa** per il termine generale

Formula chiusa

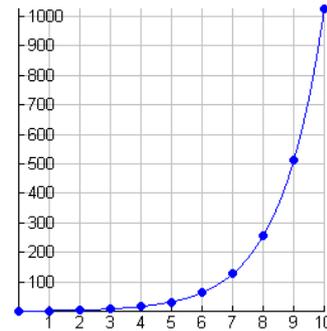
$$N_k = N_0 \cdot 2^k \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

il numero delle cellule presenti allo stadio k è proporzionale alla potenza k -esima della ragione m . Nel grafico è rappresentata la progressione

$$N_k = 2^k \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Si osservi che la progressione geometrica che descrive il processo ammette come curva sostegno la funzione esponenziale (cfr. grafico a lato)

$$f(x) = N_0 \cdot 2^x$$



Passiamo ora ad studiare un modello già pronto, che descrive una *situazione* apparentemente molto distante dalla mitosi.

Le note musicali



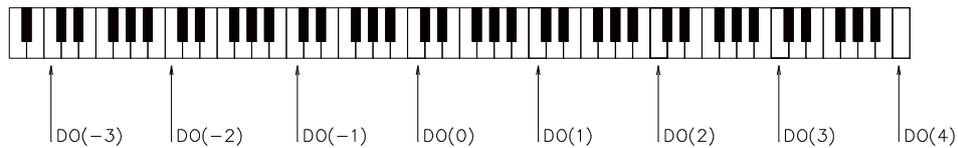
La tonalità di una nota musicale è determinata dalla frequenza della vibrazione che la origina.

Ad esempio, il DO centrale nel pianoforte corrisponde ad una vibrazione di 263 Hz (hertz).

La nota un'ottava superiore il DO centrale corrisponde a 526 Hz; la nota due ottave superiore corrisponde a 1052 Hz, mentre la nota un'ottava inferiore al DO centrale ha frequenza metà e così via.

In un pianoforte sono presenti ottave superiori alla quarta e ottave inferiori fino alla terza¹.

Modellare la scala delle frequenze in relazione alle note.



Costruzione del modello

Indichiamo con ν_k la frequenza della nota k -ottave distante dal DO centrale con $-3 \leq i \leq 4$, $i \in \mathbb{Z}$.

Osservato che la frequenza della vibrazione raddoppia quando si cresce di un'ottava, il processo iterativo seguente descrive il variare delle frequenze del DO

Processo iterativo

$$\begin{cases} \nu_0 = 263 \\ \nu_{i+1} = 2 \cdot \nu_i \quad -3 \leq k \leq 4 \end{cases}$$

Le frequenze

$$\nu_{-3} \quad \nu_{-2} \quad \dots \quad \nu_0 \quad \nu_1 \quad \dots \quad \nu_4$$

costituiscono quindi una progressione geometrica di ragione $m = 2$.

Analogamente a quanto visto nel caso della mitosi, si deduce la seguente formula chiusa per il termine generale

$$\nu_k = \nu_0 \cdot 2^k \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

La tabella a lato ed il grafico seguente costituiscono due diverse rappresentazioni del processo.

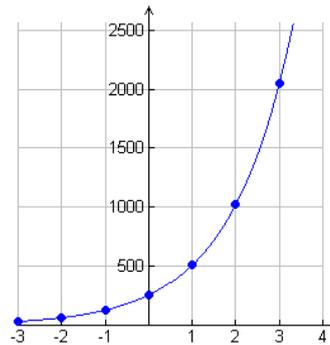
funzione esponenziale

Numero di ottave rispetto al DO centrale	Vibrazione (Hz)
-3	$263 \cdot 2^{-3} = 32.875$
-2	$263 \cdot 2^{-2} = 65.75$
-1	$263 \cdot 2^{-1} = 131,5$
0	$263 \cdot 2^0 = 263$
1	$263 \cdot 2^1 = 526$
2	$263 \cdot 2^2 = 1052$
3	$263 \cdot 2^3 = 2104$
4	$263 \cdot 2^4 = 4208$

¹ L'intervallo delle frequenze dell'udibile umano è $16 \div 12.000$ Hz.

Al processo resta associata la funzione esponenziale

$$f(x) = 263 \cdot 2^x .$$



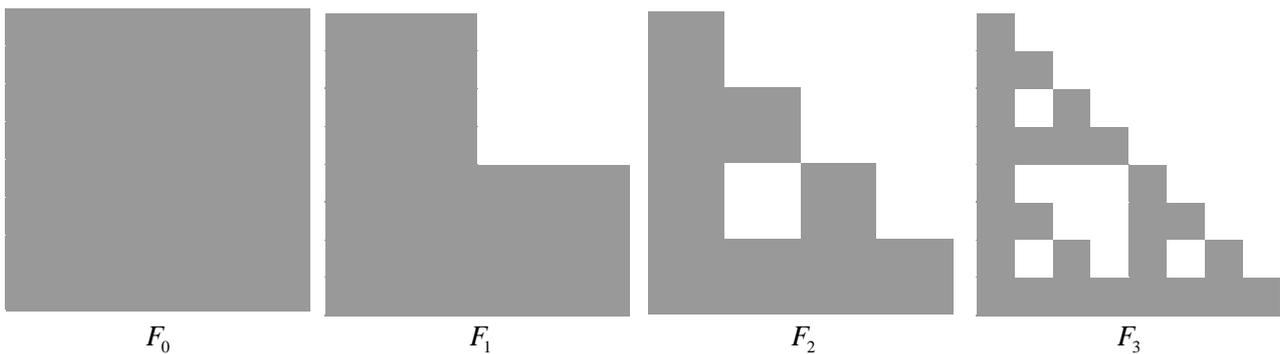
Sarà forse sorprendente osservare che il **modello matematico della mitosi e quello che governa la tonalità delle note musicali sono identici.**

Come vedremo nei prossimi esempi, questo stesso modello si presta a descrivere una vasta gamma di situazioni della realtà.

Proponiamo ora un'applicazione matematica. Si tratta di una figura geometrica apparentemente complessa, detta *frattale*, che in realtà è costruite tramite un processo iterativo semplicissimo!

Una figura *straordinaria*

Si consideri il processo iterativo descritto dalle immagini seguenti



Il processo è generato dalla trasformazione T :

dividi il quadrato in quattro parti ed elimina quella in alto a destra

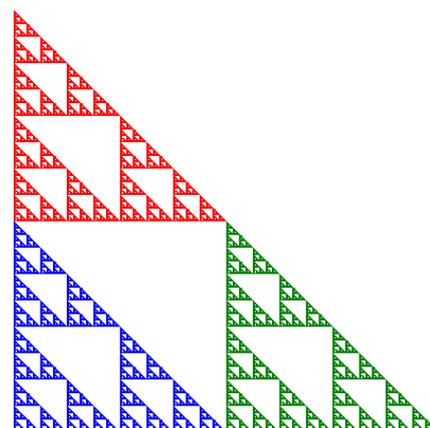
Questa trasformazione *porta* il quadrato F_1 nella figura F_2 , ed applicata ai tra quadrati della figura F_2 , li trasforma nella figura F_3 , e così via ...

Possiamo schematizzare il processo nel modo seguente

$$\begin{cases} F_0 & \text{start} \\ F_k = T(F_{k-1}) & k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Si osservi che il processo non ammette una formula chiusa. Possiamo comunque calcolare l'area della figura n-esima F_n .

N.B. La figura limite del processo è il noto frattale *Gerla di Sierpinski* (cfr. immagine sopra).



Analisi del modello

Siamo di fronte, anche in questo caso, ad un processi iterativo

$$(2) \quad \begin{cases} F_0 & \text{start} \\ F_{n+1} = T(F_n) & n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

ove le iterate $(F_n)_n$ sono figure geometriche.

Step 1

Osserviamo che il quadrato iniziale, di area A_0 , è trasformato nella figura F_1 , costituita da tre quadrati, ciascuno di area $A_0/4$.

Pertanto l'area della figura F_1 è pari a $A_1 = \frac{3}{4}A_0$.

Dalla (2) è facile dedurre il processo iterativo che descrive le aree delle figure iterate

Processo
iterativo sulle
aree

$$\begin{cases} A_0 & \text{start} \\ A_{n+1} = \frac{3}{4}A_0 & n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Precisamente, l'area di ciascuna figura è pari ai $3/4$ dell'area della figura precedente.

E' facile dedurre la formula chiusa

$$A_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n A_0$$

Una pillola teoria

Processi geometrici

Progressione geometrica

Una sequenza $(g_n)_n$ costituisce una **progressione geometrica** quando è generata da un *processo a rapporto costante o geometrico*

$$\begin{cases} g_0 & \text{start} \\ \frac{g_{n+1}}{g_n} = m = \text{cost} & n \in N \end{cases}$$

ove la costante m è detta *ragione*.

Un processo geometrico è generato da una **trasformazione omotetica** o **riscaldamento**

Formula chiusa

$$T(x) = mx$$

Attraverso la formula ricorsiva

$$\begin{cases} g_0 & \text{start} \\ g_{n+1} = T(g_n) & n \in N \end{cases}$$

Il *termine generale* n -esimo espresso dalla formula chiusa

$$g_n = g_0 m^n \quad n=0,1,2,\dots$$

è direttamente proporzionale alla potenza n -esima della ragione m .

Assunto lo start $g_0 > 0$ discutiamo il comportamento delle iterate al variare del rapporto di scala m .

Caso $m > 0$

Se $\boxed{m > 0}$ le iterate sono positive. Inoltre i punti

$$(\text{stadio, valore iterato corrispondente}) = (n, x_0 m^n)$$

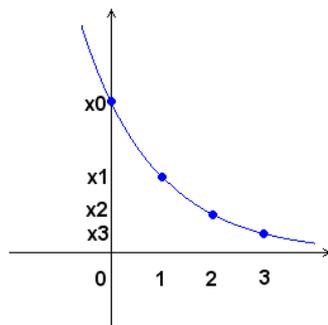
associati al processo appartengono alla curva-sostegno di equazione

$$y = y(x) = g_0 m^x$$

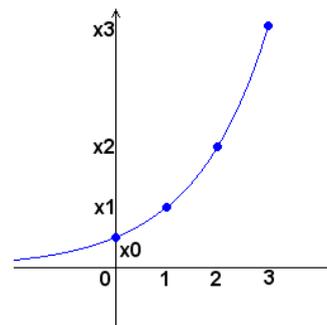
Funzione esponenziale

che è una funzione esponenziale.

Curve sostegno del processo



$$0 < m < 1$$



$$m > 1$$

Caso $m = 1$

Se $\boxed{m = 1}$ la curva-supporto si riduce alla retta $y = x_0$.

Caso $m < 0$

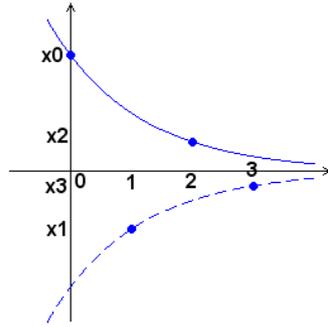
Se $\boxed{m < 0}$ le iterate sono a segno alterno e i punti $(n, g_0 m^n)$ giacciono su una delle due curve-sostegno di equazione

$$y = y(x) = g_0 |m|^x$$

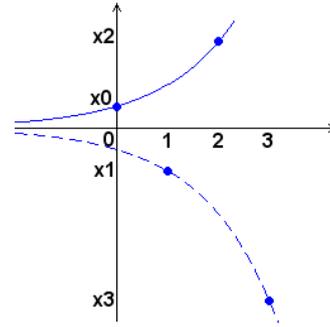
$$y = y(x) = -g_0 |m|^x$$

saltellando alternativamente dall'una all'altra.

Curve sostegno del processo



$$-1 < m < 0$$



$$m < -1$$

Caso $m = -1$

Se $\boxed{m = -1}$ le curve-sostegno si riducono alle rette $y = \pm g_0$.

Sinteticamente diremo che **i riscaldamenti generano processi esponenziali.**

Ogni processo geometrico può essere ricondotto alla *forma canonica*

Forma canonica

$$0, q, 2q, \dots, nq, \dots$$

dividendo tutti i termini per il valore iniziale.

Viceversa, assegnata una funzione esponenziale

$$f(x) = Aa^x$$

le immagini dei punti di ascissa intera $f(0), f(1), f(2), \dots, f(n), \dots$ costituiscono un processo geometrico (di ragione a e primo termine A) che rappresenta la **discretizzazione** del modello continuo.

Adottando il modello di crescita/decrescita esponenziale, affrontiamo alcune interessanti questioni tratte dal mondo reale.

Proponiamo due situazioni apparentemente molto diverse, una di decrescita ed una di crescita, che – come vedremo - si modellano con un processo iterativo dello stesso tipo.

Kerosene per jet

Le leggi federali degli USA prescrivono di depurare il kerosene utilizzato come carburante dei jet, mediante un'operazione di filtraggio attraverso un'apposita condotta contenente argilla.



Evidentemente la riduzione delle sostanze inquinanti dipende dalla lunghezza della condotta. Determiniamo la funzione che descrive il processo di filtraggio.

Costruzione del modello

Denotiamo con k la percentuale di impurità che un *foot* di condotta riesce ad eliminare e con P_0 la percentuale di sostanze inquinanti presenti nel kerosene prima del processo.

Dopo il filtraggio operato da 1 *foot* (circa 30 cm) di condotta, la percentuale di impurità si è ridotta a $(100 - k)\%$, cioè si ha

$$P_1 = \left(1 - \frac{k}{100}\right) P_0.$$

Analogamente, dopo il secondo *foot* di filtraggio si avrà

$$P_2 = \left(1 - \frac{k}{100}\right) P_1 = \left(1 - \frac{k}{100}\right)^2 P_0$$

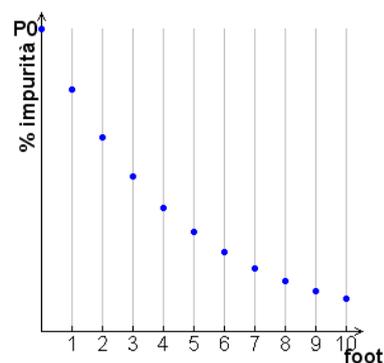
e dopo il terzo *foot*

$$P_3 = \left(1 - \frac{k}{100}\right) P_2 = \left(1 - \frac{k}{100}\right)^3 P_0$$

Così procedendo si ottengono i valori riassunti nella tabella seguente

Kerosene per jet	
Lunghezza condotta (feet)	Impurità (%)
0	P_0
1	$P_1 = \left(1 - \frac{k}{100}\right) P_0$
2	$P_2 = \left(1 - \frac{k}{100}\right)^2 P_0$
⋮	⋮
n	$P_n = \left(1 - \frac{k}{100}\right)^n P_0$

Funzione lunghezza condotta-impurità(%)



Il processo di filtraggio è allora descritto dal processo iterativo

Processo iterativo omotetico

$$\begin{cases} P_0 & \text{start} \\ P_{n+1} = \left(1 - \frac{k}{100}\right)^n P_n & n \in N \end{cases}$$

generato dalla **trasformazione omotetica** $T(x) = \left(1 - \frac{k}{100}\right)x$,

attraverso la formula

$$\begin{cases} P_0 & \text{start} \\ P_{n+1} = T(P_n) & n \in N \end{cases}$$

Progressione geometrica

La sequenza $(P_n)_n$ costituisce una **progressione geometrica** di ragione

$q = 1 - \frac{k}{100}$ ed è facile vedere che il processo ammette la formula chiusa

$$P_n = \left(1 - \frac{k}{100}\right)^n P_0 \quad n \in N$$

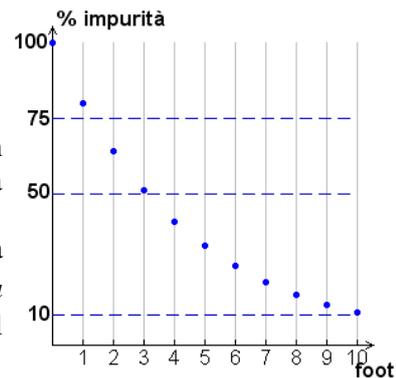
Come era naturale aspettarsi, la percentuale P_n di sostanze inquinanti presenti nel kerosene allo stadio n , diminuisce al crescere di n .

Il salto incrementale

$$\Delta P_n = P_n - P_{n-1}$$

descrive l'*efficacia* del sistema di filtraggio in quanto fornisce la velocità con cui le impurità vengono eliminate.

Il grafico a lato (relativo a $k = 20\%$), mostra inoltre che il *potere depurante della condotta diminuisce ad ogni stadio*, ovvero ΔP_n decresce al crescere dello stadio.



Potere depurante della condotta

Infatti mano a mano che il kerosene viene purificato, le sostanze inquinanti diminuiscono, e diminuisce quindi anche la quantità di sostanze impure eliminate.

Ad esempio, dopo un solo metro l'inquinamento si è ridotto di un quinto, occorrono tre metri per portarlo alla metà e ne sono necessari addirittura dieci per abbatterlo del 90%.

Studenti stranieri in Italia

Nella tabella seguente è riportato il numero degli studenti stranieri in Italia dal 1995 al 2009

Studenti stranieri in Italia							
anno scolastico	95-96	96-97	97-98	98-99	99-00	00-01	01-02
studenti (migliaia)	50	57	70	85	119	147	181
anno scolastico	02-03	03-04	04-05	05-06	06-07	07-08	08-09
studenti (migliaia)	232	282	361	424	500	575	675

Fonte: Ministero dell'Istruzione

Una prima osservazione dei dati, ci consente di stabilire che gli studenti stranieri sono aumentati ogni anno e che nel corso dei primi 12 anni si sono decuplicati.

Ma potremmo farci delle domande più precise:

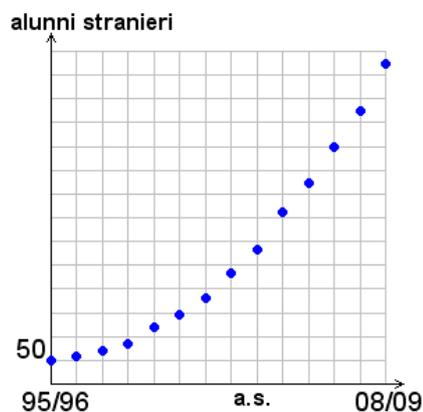
Come è stata l'evoluzione? Si è trattato di una crescita a tasso costante (lineare) o l'aumento è stato più consistente negli ultimi anni?

Costruzione del modello

Riportando i dati in un sistema di riferimento cartesiano, otteniamo il diagramma a lato.

Ora la situazione appare più chiara: il fenomeno sembra seguire una crescita di tipo esponenziale.

Per confermare (o confutare) questa congettura, valutiamo il rapporto fra due termini consecutivi



Elaborazioni sui dati

Variazione studenti stranieri in Italia							
anno scolastico	95-96	96-97	97-98	98-99	99-00	00-01	01-02
studenti (migliaia)	50	57	70	85	119	147	181
stadio	0	1	2	3	4	5	7
rapporto		1.14	1.23	1.21	1.4	1.23	1.23
anno scolastico	02-03	03-04	04-05	05-06	06-07	07-08	08-08
studenti (migliaia)	232	282	361	424	500	575	675
stadio	8	9	10	11	12	12	14
rapporto	1.28	1.21	1.28	1.17	1.17	1.15	1.17

media

Effettivamente i valori ottenuti sono quasi tutti *prossimi* ad 1.2; operando una media, si ottiene 1.23

Si può quindi *approssimare* il fenomeno mediante il processo iterativo omotetico

Processo iterativo

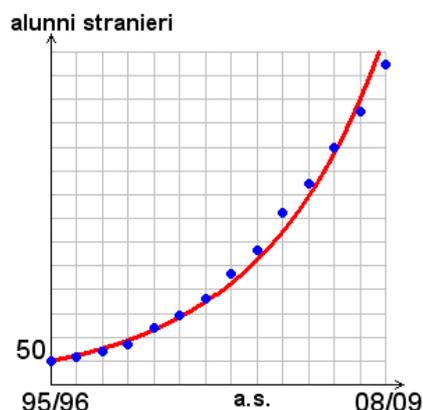
$$\begin{cases} A_0 = 50 & \text{start} \\ A_{n+1} = 1.23 A_n \end{cases}$$

generato dalla trasformazione

$$T(x) = 1.23 x$$

che conduce alla **formula chiusa**

$$A_n = A_0 (1.23)^n = 50 \cdot (1.23)^n$$

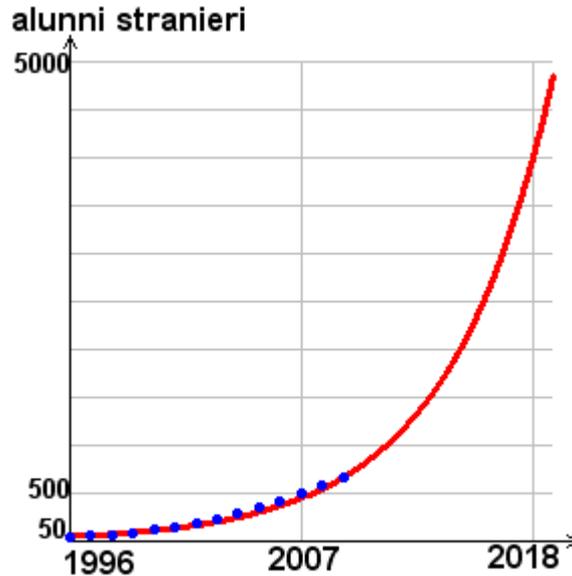


Si osservi che la successione delle iterate ammette come curva di sostegno il grafico della funzione esponenziale

$$f(x) = 50 \cdot (1.23)^x$$

Sulla base del modello potremmo fare previsioni sull'evoluzione futura del fenomeno...

previsioni



Siamo in grado di confrontare due modelli già pronti?

Riscaldamento globale

Il gas maggiormente responsabile dell'effetto serra è l'anidride carbonica. In base alla previsione più pessimistica delle Nazioni Unite, la quantità di anidride carbonica nell'atmosfera (in parti di volume per milione) è approssimabile con il seguente modello esponenziale

$$C(t) = 277e^{0.00353t} \quad 0 \leq t \leq 350$$

dove t è il tempo in anni trascorsi dal 1750.

Un altro modello di previsione basato su uno scenario "intermedio" sempre delle Nazioni Unite è il seguente

$$C^*(t) = 277e^{0.00267t} \quad 0 \leq t \leq 350$$



Fonte: Tom Boden/Oak Ridge National Laboratory, Scripps Institute of Oceanography/University of California, International Panel on Climate Change/ New York Times, 1.12.1997

Discussione del modello

Osserviamo innanzi tutto che l'intervallo temporale coinvolto nei due modelli è 1750 – 2100.

Si tratta di due modelli simili, la loro differenza consiste nella base della funzione esponenziale coinvolta. Osserviamo infatti che, per una ben nota proprietà delle potenze (potenza di potenza), si ha

$$e^{0.00353t} = (e^{0.00353})^t \quad \text{e} \quad e^{0.00267t} = (e^{0.00267})^t$$

Confronto fra i Poiché ovviamente
due modelli

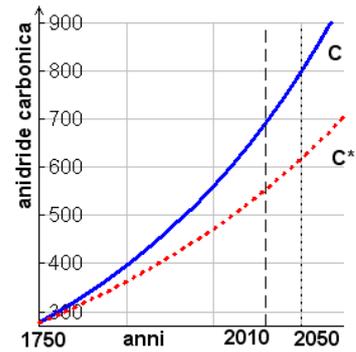
$$e^{0,00267t} < e^{0,00353t} \quad 0 < t$$

a cui si deduce (cfr. anche grafico a lato)

$$C^*(t) \leq C(t) \quad 0 \leq t \leq 350$$

Il grafico a lato mette in evidenza il divario fra le due previsioni; in particolare, i modelli forniscono per il 2010 (cioè $t = 260$) due stime che differiscono di circa 150 parti per milione (che rappresenta il 21% della quantità predetta).

La differenza fra le due stime sale ad oltre 180 parti se relativa al 2050.



Dal grafico si può dedurre che, in entrambi i modelli, il **tasso di variazione** $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ è una funzione **crescente** del tempo. Così l'**aumento** annuale di anidride carbonica non è costante, ma **cresce nel tempo**.

Una pillola di teoria

La funzione esponenziale

Modello generale

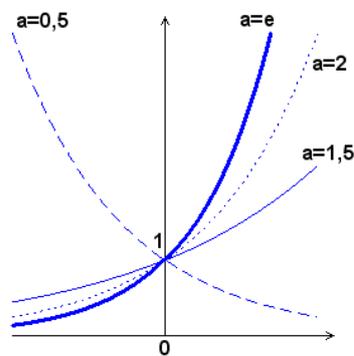
Una funzione esponenziale è del tipo

$$f(x) = B a^{kx}$$

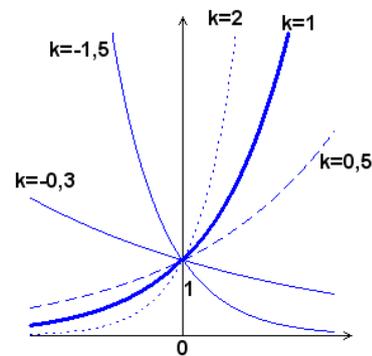
dove $B = f(0)$ è l'ordinata del punto di intersezione con l'asse delle ordinate (intercetta) ed $0 < a \neq 1$ è la base. Assumiamo, senza restrizione di generalità, $B > 0$.

Se $a > 1$ la funzione è crescente, se $0 < a < 1$ è decrescente.

Famiglie di funzioni esponenziali



$$f_a(x) = a^x$$



$$f_k(x) = e^{kx}$$

asintoto

Le funzioni esponenziali assumono solo valori positivi, ed ammettono l'asse delle ascisse come asintoto (cfr. [3]).

Due modelli di crescita a confronto

Proponiamo ora il confronto fra due modelli di crescita diversi, quello esponenziale (tema chiave di questa unità didattica) e quella lineare.

Risparmio consapevole

La Signora Rossi, pensionata, è titolare di un libretto di risparmio in cui ha un deposito di circa 12.000 €. La sua Agenzia di Credito le ha recentemente comunicato che il tasso di interesse annuo è sceso ancora una volta (raggiungendo lo 0,6%) e la signora è piuttosto seccata e preoccupata. E' quindi molto sorpresa quando viene a sapere (tramite una pubblicità televisiva) che una nuova Banca on-line promette un interesse del 4,70%. Essendo un po' in difficoltà con l'informatica e ... la matematica chiede aiuto al nipote Bob.



Costruzione del modello

Attraverso internet Bob ha conferma del tasso di interesse, ma viene anche a sapere che gli interessi annui sono tassati al 12,50 %. Denotato pertanto con i^* il tasso di interesse annuo lordo, quello netto si riduce a

$$i = \frac{87,5}{100} \cdot i^*$$

Interesse annuo costante

Poiché la nonna non ha ancora deciso quale somma eventualmente trasferire alla nuova banca, Bob denota C la somma iniziale depositata. L'interesse annuo netto è pari a $I = i \cdot C$.

Indicato con M_n il montante (capitale depositato + interesse netto complessivo), il processo di capitalizzazione è descritto dalla tabella a lato.

Il modello è di *tipo iterativo* in quanto il montante di un dato anno dipende da quello dell'anno precedente.

Capitalizzazione semplice	
anno	montante
0	$M_0 = C$
1	$M_1 = C + I$
2	$M_2 = M_1 + I$
⋮	⋮
n	$M_n = M_{n-1} + I$

Precisamente il processo ammette la seguente rappresentazione

$$\begin{cases} M_0 = C & \text{start} \\ M_{n+1} = M_n + I & n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Progressione aritmetica

Bob scopre che la sequenza $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dei montanti costituisce una **progressione aritmetica** di ragione I . In modo analogo al caso precedente si perviene alla formula chiusa

Formula chiusa

$$M_n = C + nI = (1 + ni)C$$

Questa mostra come la crescita del capitale sia direttamente proporzionale alla durata dell'investimento, come evidenziato dal grafico seguente.

D'altra parte il montante è anche direttamente proporzionale al capitale investito, così gli esperti del settore finanziario si limitano a fare le loro considerazioni su un capitale iniziale unitario ($C=1$).

La formula chiusa ha un notevole vantaggio: permette di calcolare il montante n -esimo con solo 4 operazioni algebriche, a partire dal capitale iniziale C e dal tasso di interesse annuo i , evitando il calcolo dei montanti di tutti i passi precedenti.

La nonna può quindi fare immediatamente un confronto fra i due investimenti.

Il tasso di interesse netto praticato alla nonna sul libretto bancario è pari a

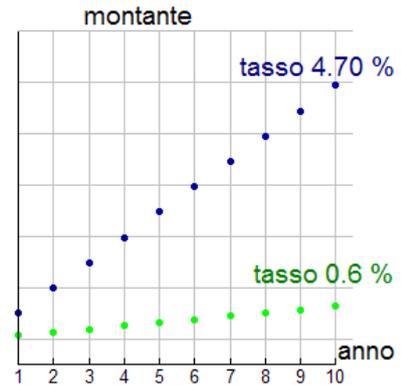
$$i_1 = \frac{87,5}{100} \cdot 0,6\% = 0,525\%$$

mentre quello offerto dalla banca on-line è pari a

$$i_2 = \frac{87,5}{100} \cdot 4,7\% = 4,1125\%$$

Valutazione del modello

Bob è quindi in grado di confrontare la crescita nel tempo dei due investimenti, a parità di capitale iniziale (cfr. grafico a lato).



Risparmio consapevole modifica del piano

La Signora Rossi, soddisfatta del risultato del nipote, racconta l'accaduto a tutti i conoscenti. Uno di essi però, la dà un consiglio aggiuntivo: se non ritira gli interessi, ma li lascia fruttare per qualche anno otterrà un risultato eccezionale!

La nonna si rivolge di nuovo a Bob, che deve rimettersi al lavoro...

In questo processo l'interesse, maturato alla fine di ogni periodo e non ritirato, *capitalizza*, in altre parole alla scadenza di ogni periodo il montante accumulato diventa il capitale investito nel periodo successivo su cui calcolare il relativo interesse.

Capitalizzazione composta

In questo modo *l'interesse capitalizza e produce a sua volta interesse*. Il processo, detto di *capitalizzazione composta*, è descritto dalla tabella a lato. Precisamente il processo ammette la seguente rappresentazione

Capitalizzazione composta	
anno	montante
	$M_0 = C$
1	$M_1 = M_0 + iM_0 = (1+i)M_0$
2	$M_2 = (1+i)M_1$
⋮	⋮
n	$M_n = (1+i)M_{n-1}$

$$\begin{cases} M_0 = C & \text{start} \\ M_{n+1} = (1+i)M_n & n = 0,1,2,\dots \end{cases}$$

Così (assunto il capitale iniziale non nullo) la sequenza dei montanti è *a rapporto costante* ovvero due termini consecutivi della sequenza presentano rapporto costante

$$\frac{M_k}{M_{k-1}} = (1+i) \quad k = 1,2,\dots,n$$

La sequenza costituisce quindi una **progressione geometrica** di ragione $q = (1+i)$ e può essere *descritta* attraverso la seguente **formula chiusa**

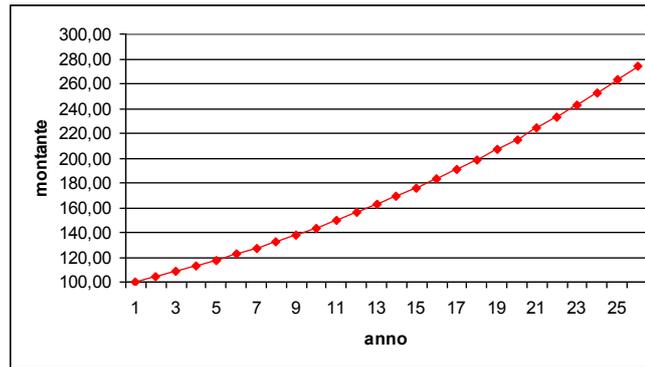
Progressione geometrica

$$M_n = (1+i)^n C$$

Diretta proporzionalità

Questa formula evidenzia che **il montante** è (come nel caso della capitalizzazione semplice) **direttamente proporzionale** al capitale investito.

D'altra parte **il montante cresce** all'aumentare della durata dell'investimento, ma **non in maniera proporzionale**. Infatti, riportando le coppie $(k, M_k)_k$ in un sistema cartesiano ci si accorge che non sono allineate.



Crescita esponenziale

In effetti la formula chiusa consente di stabilire che la crescita del montante non è lineare, ma è *esponenziale* rispetto alla durata dell'investimento. Infine la funzione

$$y = (1+i)^x C$$

è la curva supporto del processo di capitalizzazione composta.

Confronto fra crescita lineare ed esponenziale

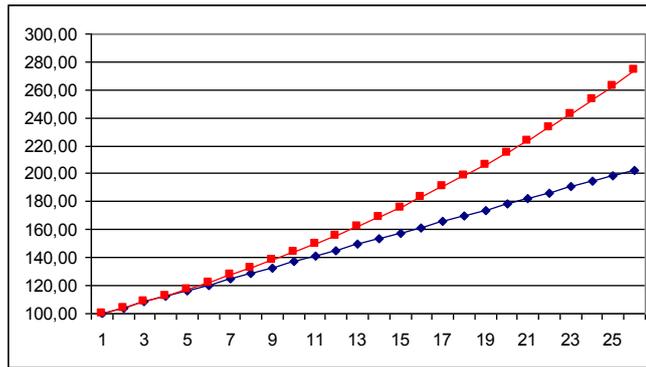
Facendo ricorso ad un foglio elettronico si possono facilmente confrontare i due piani di risparmio, quello a capitalizzazione semplice e quello a capitalizzazione composta, partendo da un capitale iniziale di 100 €.

Confronto fra capitalizzazione semplice e composta

stadio o periodo	capitale iniziale	tasso netto interesse	montante capitaliz. semplice	montante capitaliz. composta	differenza
0	100,00	4,1125	100,00	100,00	0,0000
1			104,11	104,11	0,0000
2			108,23	108,39	0,1691
3			112,34	112,85	0,5143
4			116,45	117,49	1,0429
5			120,56	122,32	1,7623
6			124,68	127,36	2,6804
7			128,79	132,59	3,8054
8			132,90	138,05	5,1457
9			137,01	143,72	6,7104
10			141,13	149,63	8,5085
15			161,69	183,04	21,3513
20			182,25	223,90	41,6518
25			202,81	273,89	71,0748

La tabella mostra che, dopo il primo anno, il montante della capitalizzazione composta supera quello della capitalizzazione semplice.

In dieci anni di investimento, la differenza è già l'8,5% del capitale iniziale. Su lunghi periodi, diventa notevole come mostra il grafico della figura seguente: il raddoppio del capitale si verifica nel corso del 25^o anno in regime di capitalizzazione semplice, e già al 18^o anno in capitalizzazione composta .



QUESITI E MODELLI

L'altalena

Un'altalena per bambini oscilla (sotto l'effetto della sola gravità) perdendo ad ogni semi-oscillazione l'1% della energia a causa dell'attrito. Confutare l'affermazione "dopo quarantanove oscillazioni l'energia residua è uguale al 2% dell'energia iniziale".



Piani di investimento a confronto

Un agente finanziario propone due piani di investimento, riportati nella tabella. Egli afferma che per investimenti di oltre 10.000 € il piano A risulta più conveniente. Avete argomentazioni per verificare se l'affermazione è vera o falsa?

	Piano A	Piano B
Tasso di interesse	2 % semestrale	4 % annuale
Spese fisse	100 € semestrali anticipati	100 € annuali. posticipati
Ritenute di legge	12% sugli interessi	12% sugli interessi

Iper-inflazione

Nel 1989 il tasso di inflazione in USA era del 4.6% annuale, mentre in Argentina era circa del 33% mensile.

Dopo aver costruito i relativi modelli, confrontare i rispettivi poteri di acquisto.



Esperimenti nucleari

All'inizio degli anni '60, durante la sperimentazione di armi nucleari, una certa quantità di stronzio-90 radioattivo fu liberato nell'atmosfera. Sapendo che la radioattività si deposita nello scheletro delle persone e considerato che il tempo di dimezzamento dello stronzio-90 è di 29 anni, ci chiediamo:

- 1) qual era nel 1990 la percentuale di radioattività ancora presente nelle ossa?
- 2) quale sarà quella nei sopravvissuti nel 2010?

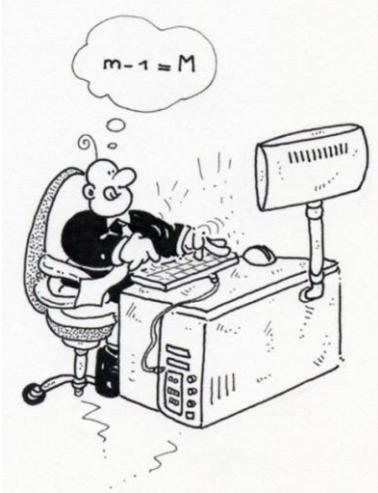


Controllo di radioattività

L'attività radioattiva di una certa sostanza si è ridotta del 30 % in 10 anni.

- a) Quale sarà la radioattività ancora presente dopo 50 anni?
- b) Qual è il tempo di dimezzamento della sostanza?
- c) Quanto si dovrà aspettare affinché la radioattività residua sia solo del 20 % ?
- d) Quando la radioattività residua sarà ridotta al 10 % ?

Vendita PC



Un nuovo modello di PC è stato lanciato sul mercato e a tutt'oggi ne sono state venduti 10.000 esemplari. Una ricerca di mercato prevede che, al massimo, se ne venderanno 10^5 unità, mentre il tasso di vendita mensile sarà pari al 10% della differenza tra il punto di saturazione del mercato e il totale delle vendite fino a quel momento.

- a) Modellare il processo individuando l'algoritmo iterativo.
- b) Tracciare il grafico dell'andamento delle vendite mensili.

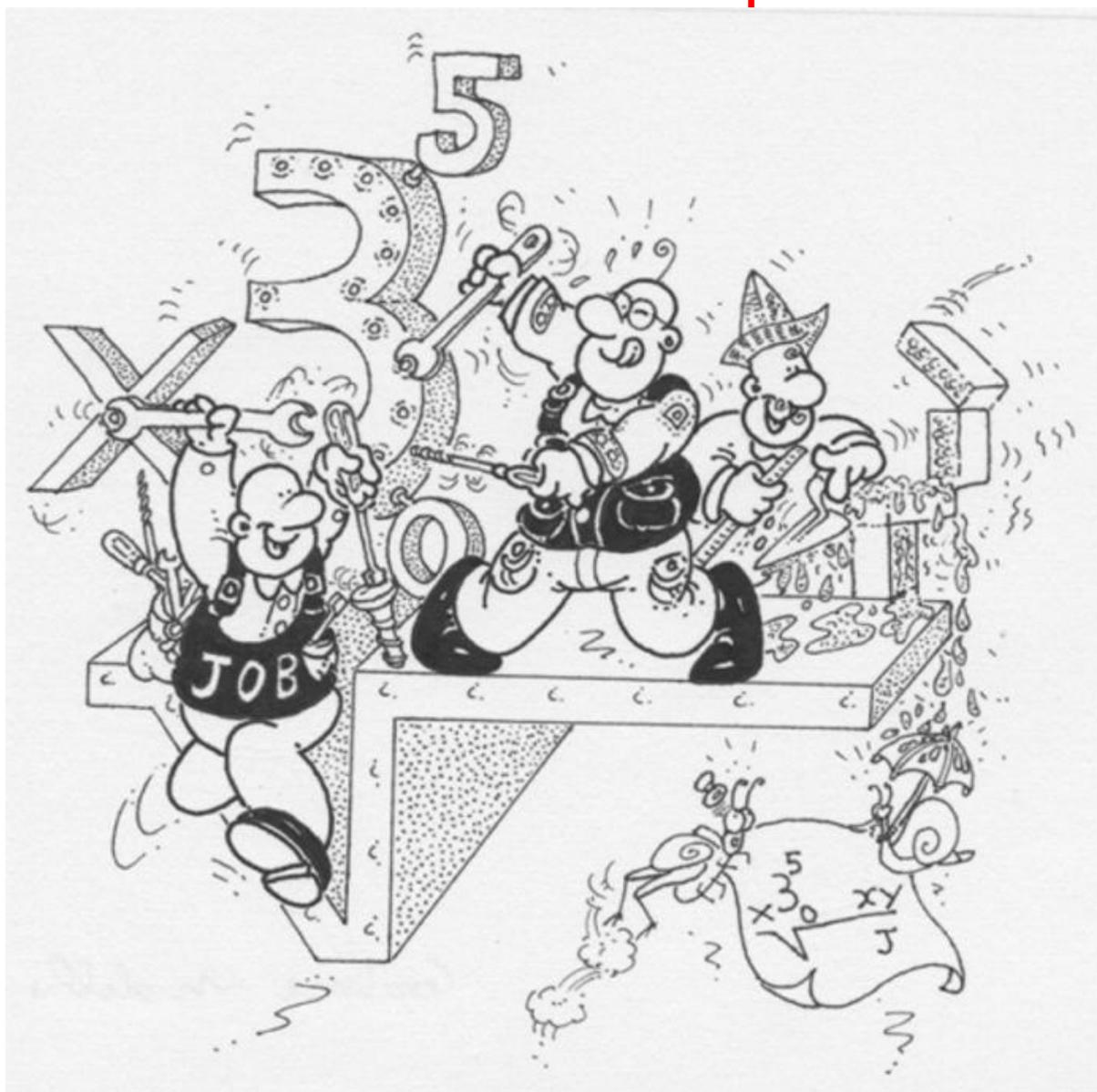


Matematica&Realtà

Percorso A

Le funzioni elementari strumento base della
modellizzazione del mondo reale

Unità didattica 5 2- modelli periodici



a cura di

Primo Brandi – Anna Salvadori

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università degli Studi di Perugia



Matematica&Realtà

Percorso **A**

Le funzioni elementari strumento base della modellizzazione del mondo reale

Unità didattica 5 2- modelli periodici

A cura di
Primo Brandi – Anna Salvadori

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università degli Studi di Perugia

Introduzione

Il percorso A prosegue l'introduzione elementare alla modellizzazione matematica della realtà iniziata nel percorso M.

Quando si vuole comprendere un fenomeno o si deve affrontare una problematica del mondo reale, può essere conveniente costruire un "prototipo virtuale" sul quale operare delle simulazioni: **il modello matematico**.

Un po' come avviene quando il sarto, prima di tagliare la stoffa, disegna e lavora sul modello di carta dell'abito o l'ingegnere che fonda il suo intervento sulla base del progetto.

Il modello matematico consente un esame oggettivo della situazione che facilita la comprensione del problema, aiuta nella valutazione di eventuali scelte e permette anche di ... azzardare previsioni!

Come vedremo con alcuni esempi, può essere conveniente ricondursi ad un modello matematico anche per affrontare questioni spicciole della vita quotidiana e si possono costruire modelli matematici avendo a disposizione strumenti elementari (la matematica di base appresa a scuola).

In questa prima unità didattica affrontiamo lo studio dei **modelli periodici**.

Per ulteriori approfondimenti si rimanda a [2].

I bozzetti umoristici sono di Luigi Bluffi

Referenze

Riferimenti strettamente collegati

[1] P.Brandi-A.Salvadori, Matematica&Realtà, Introduzione alla modellizzazione matematica con strumenti elementari, Università degli Studi di Perugia (2010)

[2] P.Brandi-A.Salvadori, Prima di iniziare (Conoscenze e competenze Matematiche di base per l'Università) 2009-10

[3] P.Brandi-A.Salvadori, Modelli matematici elementari, Ed. B.Mondadori (2004)

I progetti di approfondimento svolti dai ragazzi partecipanti ai Laboratori M&R con la guida dei loro Tutor e presentati al convegno annuale Esperienze a confronto.

AA.VV. Matematica&Realtà, Esperienze a confronto DVD (aggiornamento 2010)

Iniziamo con un *fenomeno periodico* tratto dalla tecnologia del mondo reale.

Caratteristica di un faro

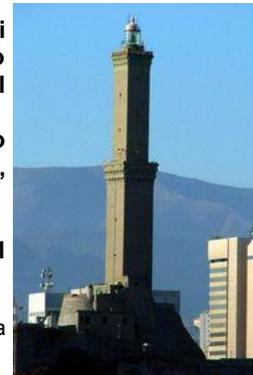
I fari marittimi, costruzioni sulla costa ben visibili dal mare, hanno lo scopo di facilitare l'approdo ai naviganti. Di notte, per essere visibile e riconoscibile, il faro emette lampi luminosi secondo un periodo predeterminato chiamato *caratteristica* del faro.

In particolare, i fari possono essere a *lampi* (i tempi di luce, detti lampi, sono molto più brevi dei tempi d'oscurità) o a *luce intermittente* (i tempi d'oscurità, detti eclissi, sono molto più corti dei tempi di luce).

La suddivisione dei tempi di luce e di oscurità dà la *fase* del faro.

Il *periodo* è l'intervallo di tempo entro il quale si svolge l'intero ciclo del segnalamento.

(Fonte: Marina Militare Italiana www.marina.difesa.it)



La Lanterna di Genova

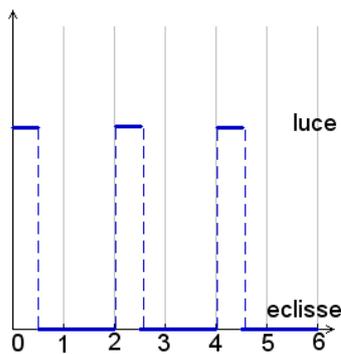
Le carte nautiche riportano le caratteristiche del segnalamento.

Ad esempio la caratteristica luminosa della Lanterna di Genova è la seguente:

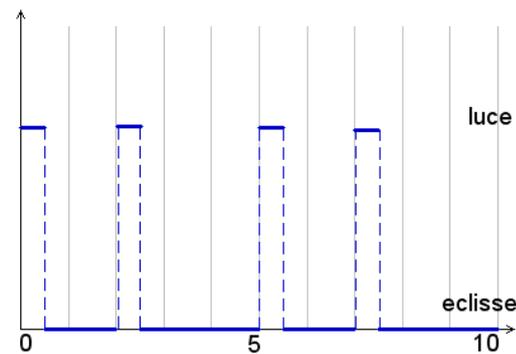
periodo 20 s

fase: luce 0.25 – eclisse 4.75 – luce 0.25 – eclisse 14.75

I due grafici seguenti rappresentano le caratteristiche di due fari aventi periodi differenti.



Periodo 2 s



Periodo 5 s

Una pillola di teoria

Funzioni periodiche

Funzione periodica

Una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è **periodica** se esiste un numero $k > 0$ tale che

$$(p) \quad f(x+k) = f(x) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

periodo

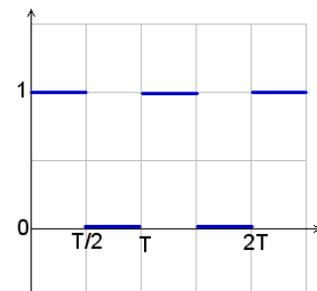
Il più piccolo valore positivo k che soddisfa la condizione (p) è detto **periodo** e sarà denotato con T .

Alcune funzioni periodiche elementari.

Funzione a impulsi rettangolari

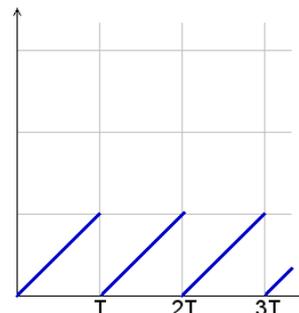
Onda quadra

$$f(x) = \begin{cases} 1 & nT \leq x \leq \frac{T}{2} + nT \\ 0 & \frac{T}{2} + nT < x < (n+1)T \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$



Funzione a **denti di sega**

Denti di sega $f(x) = x - nT \quad nT \leq x < (n+1)T \quad n = 0, 1, 2, \dots$



E ora un fenomeno periodico in economia ...

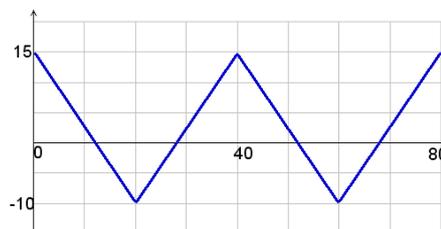
Investimenti azionari

“Il flusso annuo di investimento nei fondi azionari (misurato come percentuale del patrimonio totale) fluttua con cicli di circa 40 anni dal 1955, quando si trovava in un picco. L'altezza massima corrisponde a circa +15%, mentre quella minima a circa -10%.”

Fonte: Investment Company Institute, New York Times, 2.2.1997

Costruzione del modello Per modellizzare il fenomeno si potrebbe adottare una funzione a zig-zag (cfr. figura a lato) ma le spezzate hanno una rappresentazione formale piuttosto complicata (cfr. la pillola di teoria precedente).

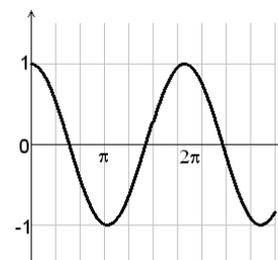
Un'alternativa interessante è fornita dalla **funzioni goniometriche**.



Dalle informazioni del quotidiano si deduce che un buon modello potrebbe essere una funzione tipo coseno. La classica funzione cosinusoidale (cfr.grafico a lato)

$$y = \cos t$$

(ove l'arco x è espresso in radianti) ha periodo 2π ed ampiezza unitaria, cioè oscilla fra -1 e 1.



L'andamento azionario invece oscilla fra -10 e +15. Si deve quindi ottenere un modello avente

Ampiezza
Valore medio ampiezza di oscillazione = $\frac{15 - (-10)}{2} = 12.5$ valore medio = $\frac{15 + (-10)}{2} = 2.5$.

Per ottenere una ampiezza pari ad 12.5 occorre moltiplicare la funzione $\cos x$ per il fattore 12.5 (Fig. 1). Per modificare il valor medio occorre traslare la funzione di 2.5 in verticale. La funzione deve essere della forma (Fig. 2)

$$2.5 + 12.5 \cdot \cos t$$

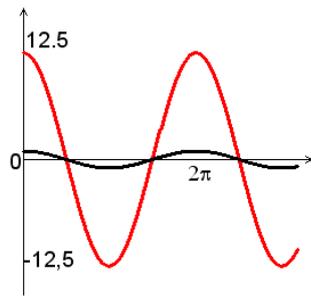


Fig. 1

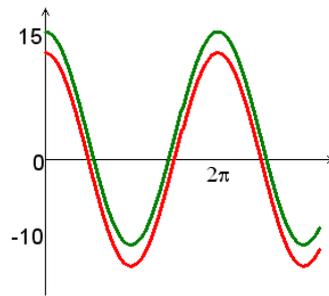


Fig. 2

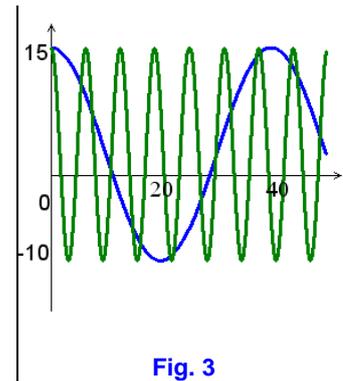


Fig. 3

Periodo

Ora occorre *sistemare* il periodo, precisamente si deve passare da 2π a 40 anni. La trasformazione necessaria è quindi un riscalamento della variabile t (tempo in anni) della forma ωt con ω costante positiva di riscalamento.

Precisamente si deve adottare un modello del tipo

$$2,5 + 12,5 \cdot \cos(\omega t).$$

In forza della definizione di periodo deve risultare

$$\cos[\omega(t+T)] = \cos(\omega t) \quad \text{per ogni } t \geq 0$$

da cui

$$\cos[\omega t + \omega T] = \cos(\omega t) = \cos(\omega t + 2\pi).$$

Ne consegue

$$\omega T = 2\pi \quad \text{ovvero} \quad \omega = 2\pi/T \quad (\text{cfr. Fig. 3}).$$

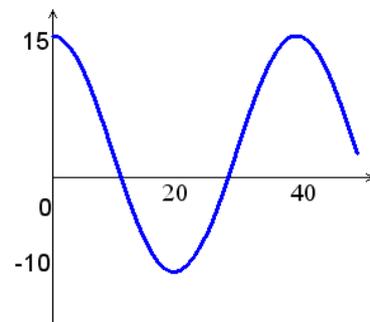
In definitiva si perviene ad un modello cosinusoidale del tipo

$$f(t) = u + A \cos(\omega t)$$

avente

- valor medio $u = (15 - 10)/2 = 2,5$
- ampiezza $A = (15 + 10)/2 = 12,5$
- periodo $T = 40$
- $\omega = 2\pi/40 = \pi/20$

Precisamente risulta (vedi grafico a lato)



$$f(t) = 2,5 + 12,5 \cos\left(\frac{\pi}{20}t\right)$$

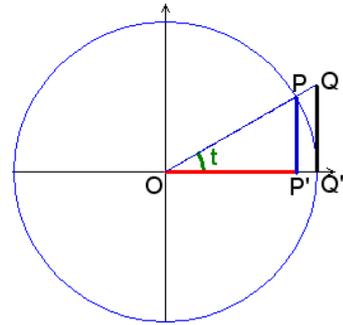
Una pillola di teoria

Funzioni goniometriche

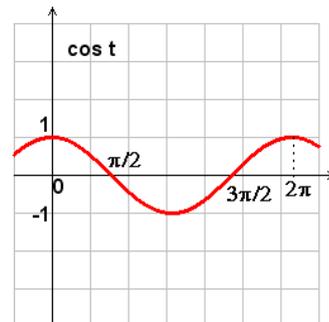
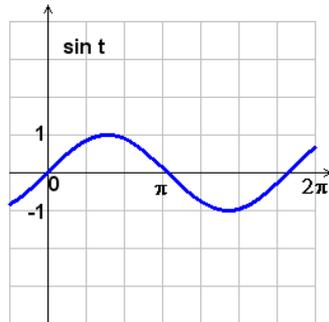
E' ben noto che ad ogni angolo vengono associate le funzioni goniometriche fondamentali (cfr. immagine a lato)

seno: $\sin t = \frac{\overline{PP'}}{\overline{OP}}$

coseno: $\cos t = \frac{\overline{OP'}}{\overline{OP}}$



Funzioni seno e coseno



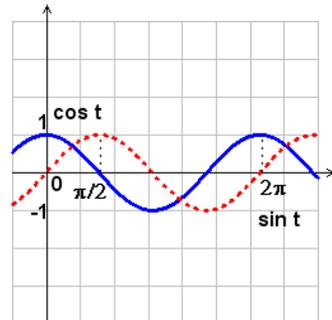
Le funzioni seno e coseno

- hanno una differenza di fase pari a $\pi/2$

infatti risulta

$$\cos t = \sin(t + \pi/2)$$

- sono legate dalla relazione fondamentale



Relazione fondamentale

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

(identità trigonometrica, conseguente al teorema di Pitagora).

Formulazione generale

Le funzioni sinusoidali e cosinusoidali, nella formulazione generale, sono definite

Rappresentazione mediante ampiezza, pulsazione, fase

$$f(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$g(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

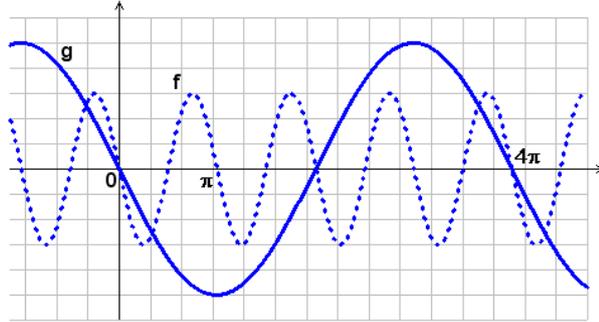
ove

- $|A|$ ampiezza
- $\frac{2\pi}{|\omega|}$ periodo (tempo impiegato a compiere un'oscillazione completa)
- φ angolo di fase all'origine
- ω pulsazione ($|\omega|$ rappresenta il numero delle oscillazioni in un tempo 2π)

Esempio

Consideriamo, ad esempio, le funzioni

$$f(t) = 3 \sin 2t \quad g(t) = 5 \cos\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$



L'angolo di fase all'origine della funzione f è nullo, mentre quello della funzione g è $\pi/2$.

Dal grafico appare evidente che la funzione f ha ampiezza 3 e periodo π , mentre la funzione g ha ampiezza 5 e periodo 4π . Inoltre il grafo della funzione g è una traslazione lungo l'asse x del grafo della funzione $g_1(t) = 5\cos(t/2)$.

Rappresentazione mediante ampiezza, frequenza, fase

Le funzioni sinusoidali (ed analogamente quelle cosinusoidali) sono spesso scritte nella forma

$$f(t) = A \sin(2\pi \nu t + \varphi)$$

in funzione dei tre parametri

- $|A|$ ampiezza
- ν frequenza ($|\nu|$ rappresenta il numero di cicli o oscillazioni complete nell'unità di tempo, pari a 1 secondo)
- φ angolo di fase all'origine

In forza della similitudine dei triangoli OPP' e OQQ' , risulta

$$\overline{OP'} : \overline{PP'} = \overline{OQ'} : \overline{QQ'}$$

da cui

$$\overline{QQ'} = \overline{OQ'} \cdot \frac{\overline{PP'}}{\overline{OP'}} = \frac{\sin t}{\cos t}$$

La lunghezza del segmento $\overline{QQ'}$ si definisce tangente dell'angolo t e si scrive

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$$

Funzione tangente

La funzione $\tan t$ ha per dominio

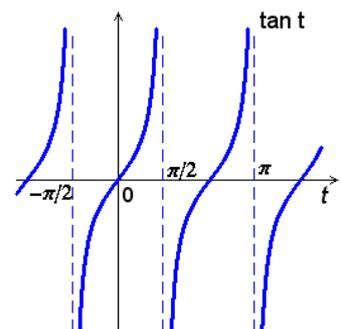
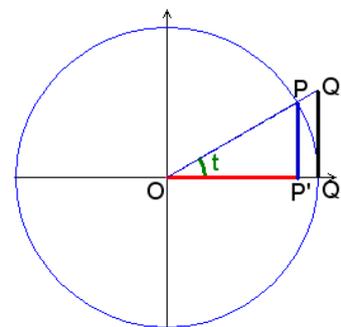
$$R - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in Z \right\}$$

e codominio tutto l'asse reale.

La funzione è periodica di periodo π ed ammette le rette

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in K$$

come asintoti (cfr. grafico a lato).

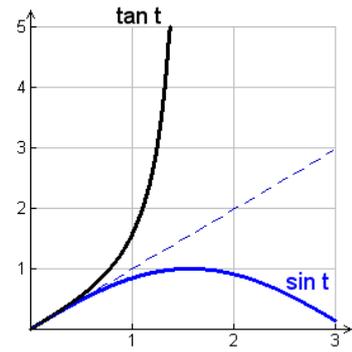


Per archi piccoli il seno e l'arco si confondono

$$\sin x \cong x$$

pertanto si può provare che la retta tangente nell'origine alla funzione $\sin x$ è $y = x$, bisettrice del primo e quarto quadrante (cfr. grafico a lato).

Per le motivazioni teoriche e i dettagli tecnici si veda [3].



Fenomeni e funzioni periodici

Strade pericolose

Se durante un tragitto in auto incontriamo uno di questi segnali che cosa pensiamo?



Discesa pericolosa

*Presegnala un tratto di strada in discesa secondo il senso di marcia.
La pendenza è espressa in percentuale*



Salita pericolosa

*Presegnala un tratto di strada in salita secondo il senso di marcia.
La pendenza è espressa in percentuale*

I segnali indicano una *pendenza stradale* del 10%.

Cercando in rete otteniamo la seguente definizione di pendenza stradale:

La pendenza m media di una strada è definita dal rapporto tra il dislivello Δy tra il punto di partenza e quello di arrivo e la distanza orizzontale Δx . La distanza orizzontale Δx è la proiezione sull'orizzontale del percorso, non la distanza effettivamente percorsa Δs .

La pendenza in percentuale si ottiene moltiplicando m per 100. Un valore maggiore della pendenza corrisponde ad una maggiore ripidità del tratto di strada. Fonte: Wikipedia

Ci possiamo chiedere: qual è l'angolo d'inclinazione della strada?

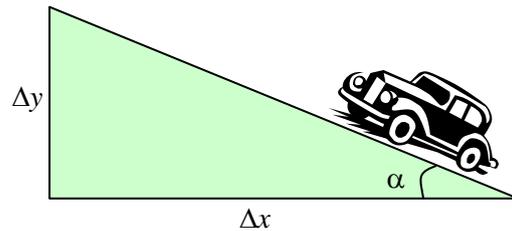
Proviamo a determinare la relazione funzionale fra pendenza e angolo di inclinazione della strada.

Tema proposto dall'Unità Locale Liceo Classico Galluppi, Catanzaro. Coordinatore: Prof. Anna Maria Canepa

Analisi della situazione Dalla definizione di pendenza stradale si ha

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Grazie alla trigonometria possiamo esprimere m in funzione dell'angolo di inclinazione della strada α :



$$m = \operatorname{tg} \alpha$$

Ci chiediamo quale angolo di inclinazione corrisponde ad una pendenza del 10%?

$$m = 0.1 = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} 0.1 \cong 0,099 \text{ radianti}$$

$$\alpha = 0,099 \cdot \frac{360}{2\pi} \cong 5,71 \text{ gradi}$$

In definitiva la relazione fra pendenza percentuale m e l'angolo di inclinazione della strada in gradi è (vedi grafico seguente)

$$\alpha = \alpha(m) = \frac{360}{2\pi} \cdot \operatorname{arctg} \frac{m}{100}$$

Tabuliamo alcuni valori del grafico:

Pendenza (%)	Inclinazione (gradi)
10	5,71
20	11,31
30	16,70
40	21,80
50	26,57
60	30,96
70	34,99
80	38,66
90	41,99
100	45,00



Rotonda illuminata

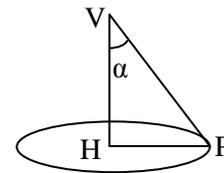
Si vuole illuminare un incrocio stradale mediante un lampione posto al centro di una rotonda spartitraffico del diametro di 40 m.

- Calcolare l'intensità luminosa al bordo della rotonda, nel caso il lampione sia alto 25 m.
- Determinare l'espressione dell'intensità di illuminazione I al variare dell'altezza del lampione.

a) L'intensità di illuminazione in un punto è proporzionale al **coseno** dell'angolo di incidenza α e inversamente proporzionale al quadrato delle distanza dalla sorgente luminosa].

Costruzione del modello

L'intensità di illuminazione nel punto P è quindi pari a



$$I_p = k \frac{\cos \alpha}{\overline{VP}^2}$$

Essendo

$$\overline{VP}^2 = 25^2 + 20^2 = 1025 \quad \cos \alpha = \frac{\overline{VH}}{\overline{VP}} = \frac{25}{\sqrt{1025}}$$

si ha quindi

Risposta al quesito

$$I_p = k \frac{25}{1025^{3/2}} \cong k \cdot 0.00076$$

Come era naturale aspettarsi, la luminosità è la stessa in ogni punto del bordo della rotonda (distribuzione *radiale*).

b) Modifica del modello

Per rispondere al quesito, riferiamoci al modello che abbiamo costruito per risolvere il quesito a).

In virtù dalla *risoluzione* dei triangoli rettangoli, si ha

$$\overline{HP} = \overline{VP} \cdot \sin \alpha \Rightarrow \overline{VP} = \frac{20}{\sin \alpha}$$

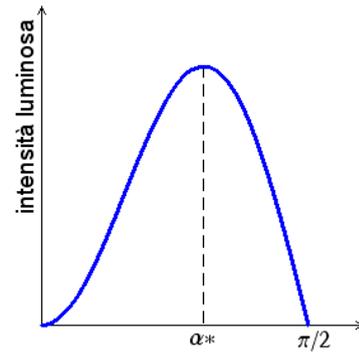
da cui segue

$$I_p = k \frac{\cos \alpha}{400} \sin^2 \alpha = \frac{k}{400} \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha)$$

con $0 < \alpha < \pi/2$

Dal grafico (cfr. immagine a lato) appare evidente che

- se $\alpha = 0$ oppure $\alpha = \pi/2$ la luminosità è nulla;
- esiste un valore *ottimale* dell'angolo α^* , cioè per il quale la luminosità sul bordo della rotonda è massima. In corrispondenza a tale angolo si ha l'altezza ottimale del lampione.



Statua della libertà

La statua della libertà, uno dei più noti monumenti di New York, è il simbolo della città.

Situata in un isolotto chiamato "Liberty Island", è alta 92 m, compreso il piedistallo di 46 m ed è visibile fino a 40 km di distanza.

Raffigura una donna che regge una fiaccola, simbolo della libertà, e con l'altra mano tiene un libro in cui è incisa la data dell'indipendenza americana "4 luglio 1776".

Progettata e costruita a Parigi (progetto F. A. Bartholdi – realizzazione G. Eiffel) fu donata dalla Francia agli Stati Uniti d'America per celebrare il centenario dell'indipendenza.



Descrivere in che modo l'angolo di visuale varia in funzione della distanza dalla statua.

Determinare qual è l'angolo di visuale corrispondente a 70 m.

Costruzione del modello

Schematizziamo la situazione mediante la figura seguente. L'osservatore si trova nel punto P, i segmenti AB e BC rappresentano il piedistallo e la statua rispettivamente.

L'angolo di visuale $\hat{C}PB$ può essere valutato mediante le formule di sottrazione della tangente.

Precisamente, posto

$$\hat{C}PA = \alpha \quad \hat{B}PA = \beta$$

si ha

$$\operatorname{tg} \hat{C}PB = \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

Inoltre posto $\overline{AP} = x$, risulta

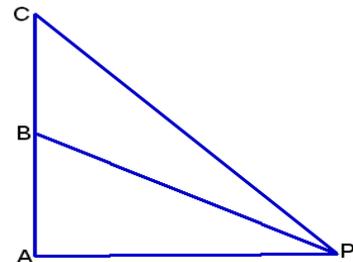
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{92}{x} \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{46}{x}$$

da cui

$$\operatorname{tg} \hat{C}PB = \frac{46x}{x^2 + 4232}$$

$$\hat{C}PB = \operatorname{arctg} \left(\frac{46x}{x^2 + 4232} \right) \text{ radianti}$$

$$\hat{C}PB = \frac{360}{2\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{46x}{x^2 + 4232} \right) \text{ gradi}$$



**Funzione
razionale**

Così la tangente dell'angolo di visuale è una *funzione razionale* della distanza dal piedistallo, mentre a lato è riportato l'andamento dell'angolo di visuale (in gradi) in funzione della distanza x dal piedistallo.

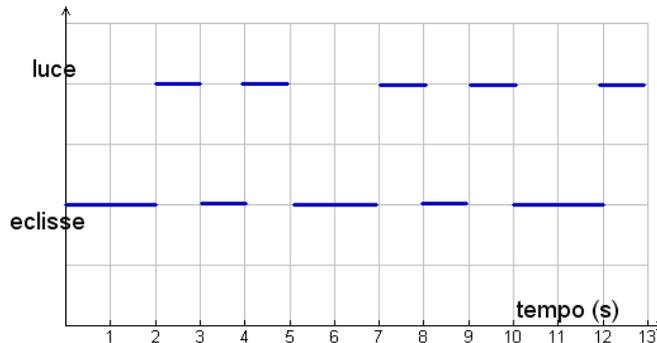
In particolare, per $x = 70\text{ m}$ si ottiene

$$\hat{CPB} = \frac{360}{2\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{46 \cdot 70}{70^2 + 4232} \right) \cong 19,42 \text{ gradi}$$

QUESITI E MODELLI

Caratteristica di un faro¹

Il diagramma seguente rappresenta la sequenza di segnali di un faro.
Determinare il periodo e la fase.

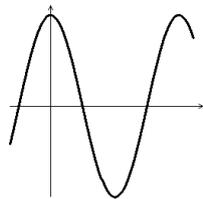


- a) Per quanti secondi il faro emette luce nel corso di 1 minuto?
b) Disegnare il grafico di una possibile sequenza di un faro che emetta luce per un totale di 30 secondi ogni minuto. Il periodo deve essere di 6 secondi.

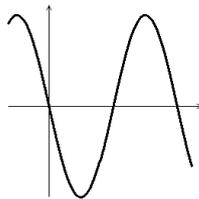
Funzioni tipo coseno

Stabilire quale, tra i grafici seguenti, è quello di ciascuna delle tre funzioni

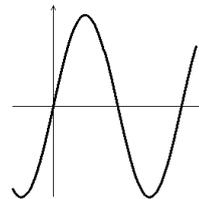
- a) $y = 2 \cos(t - \pi/2)$ b) $y = 2 \cos t$ c) $y = 2 \cos(t + \pi/2)$



(A)



(B)



(C)

Voltaggio

Il voltaggio di un elettrodomestico è espresso in funzione del tempo (in secondi) dalla funzione

$$V = V_0 \cos(120 \pi t).$$

- a) Qual è il periodo di oscillazione?
b) Cosa rappresenta V_0 ?

Baseball

Una palla da baseball lanciata con velocità v_0 ed un angolo θ (rispetto al terreno) produce una gittata pari a

$$R = R(\theta) = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta) \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

ove g è l'accelerazione gravitazionale.

Dopo aver tracciato il grafico della funzione R stabilire qual è l'angolo cui corrisponde la massima gittata e qual è tale gittata.

Aerei supersonici

Oggi si progettano aerei di linea supersonici in cui varia, durante il volo, l'angolo formato dalle ali con la carlinga. Di quanto varia l'apertura delle ali se l'angolo passa da 70° durante il decollo a 30° durante il volo supersonico?

¹ PISA 2003 – Valutazione dei quindicenni, Armando Editore 2003

[lunghezza di ciascun ala 16 m].

Vendite di computer

Le vendite di computer sono soggette a fluttuazioni stagionali. Le vendite di Computer City nel bimestre 1995-96 (ricavi in miliardi di dollari) possono essere approssimate dalla funzione

$$s(t) = 0.106 \sin(1.39t + 1.61) + 0.455 \quad 1 \leq t \leq 8$$

dove t è il tempo in trimestri e $t = 1$ rappresenta la fine del primo trimestre del 1995.

Stabilire in quali trimestri le vendite sono state massime o minime e stimare il ricavo relativo.

Calcolare ampiezza, scarto verticale, spostamento di fase, frequenza di oscillazione e periodo e interpretare i risultati.

Fonte: modello ottenuto su dati apparsi sul New York Times, 8.1.1997.

