Proposta e riflessioni per un percorso didattico sul concetto di funzione

Obiettivo

Scopo di questo lavoro è una riflessione sul concetto di funzione, alla luce dei nuovi obiettivi specifici di apprendimento per la disciplina della matematica definiti dal decreto per i nuovi licei. In particolare ho posto l'attenzione sugli obiettivi di apprendimento per il nuovo liceo scientifico, dove viene messo in risalto il fatto che la Matematica non deve essere (solo) basata sulle *conoscenze*, ma necessita di essere fondata sulle *competenze*: la Matematica, infatti, ha per sua natura un linguaggio trasversale e l'abilità di utilizzare le conoscenze in contesti interdisciplinari è un requisito fondamentale per la modellizzazione, che è una competenza che viene esplicitamente richiesta. Per lo sviluppo delle competenze è necessario che l'acquisizione delle conoscenze ed abilità avvenga in modo <u>*edotto*</u> e <u>*attivo*</u>, e lo scopo di questo percorso didattico è proprio quello di fornire degli elementi e spunti di riflessione da fare in classe.

Maggiore attenzione è stata posta nella descrizione di un'esperienza rivolta a studenti del primo biennio per l'introduzione del concetto di funzione, così come viene evidenziata nella parte della nota ministeriale, in cui vengono illustrati gli obiettivi specifici di apprendimento per i nuovi licei. Da qui si è tratto spunto per il percorso didattico.

Dal Decreto Interministeriale 211 del 7 ottobre 2010

"Regolamento recante indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento concernenti le attività e gli insegnamenti compresi nei piani degli studi previsti per i percorsi liceali.
[…]Liceo Scientifico

MATEMATICA

LINEE GENERALI E COMPETENZE
[…]
OBIETTIVI SPECIFICI DI APPRENDIMENTO
Primo biennio
[…]
Relazioni e funzioni

Obiettivo di studio sarà il linguaggio degli insiemi e delle funzioni (dominio, composizione, inversa, ecc.), anche per costruire semplici rappresentazioni di fenomeni e come primo passo all'introduzione del concetto di modello matematico. […]
Lo studente studierà le funzioni del tipo $f(x) = ax + b$, $f(x) = a/x$, $f(x) = x^2$ […] sia in termini strettamente matematici sia in funzione della descrizione e soluzione di problemi applicativi. […]
Apprenderà gli elementi della teoria della proporzionalità diretta e inversa.
Lo studente sarà in grado di passare agevolmente da un registro di rappresentazione a un altro (numerico, grafico, funzionale), anche utilizzando strumenti informatici per la rappresentazione dei dati.

Secondo biennio
[…]
Relazioni e funzioni

[…] Approfondirà lo studio delle funzioni elementari dell'analisi e, in particolare, delle funzioni esponenziale e logaritmo. Sarà in grado di costruire semplici modelli di crescita o decrescita esponenziale, nonché di andamenti periodici, anche in rapporto con lo studio delle altre discipline; tutto ciò sia in un contesto discreto sia continuo. Infine, lo studente apprenderà ad analizzare sia graficamente che analiticamente le principali funzioni e saprà operare su funzioni composte e inverse. […]

Quinto anno[…]
Relazioni e funzioni
Lo studente proseguirà lo studio delle funzioni fondamentali dell'analisi anche attraverso esempi tratti dalla fisica o da altre discipline. Acquisirà il concetto di limite di una successione e di una funzione e apprenderà a calcolare i limiti in casi semplici. […]"

Finalità

Le finalità di questo percorso vengono riportate qui di seguito.

- Sostenere la crescita culturale dell'allievo in modo tale che possa avere una comprensione critica del mondo naturale e che possa costruire una professionalità polivalente e flessibile.
- Potenziare e consolidare le attitudini degli alunni verso studi scientifici a livello anche universitario.
- Acquisire un metodo di studio improntato al rigore scientifico in modo da sapere riesaminare criticamente e sistemare in modo logico e sintetico quanto viene appreso.

Come ogni unità di apprendimento, si elencano gli obiettivi generali.

Conoscenza *(Possesso di determinati contenuti: sapere)*

- Conoscere "concetti chiave" quali: funzione, relazione binaria, invertibilità di una funzione e proprietà delle funzioni semplici e composte.
- Conoscere la proporzionalità diretta e inversa.
- Conoscere le trasformazioni omotetiche.

Abilità *(Esecuzione di determinati compiti: uso della conoscenza e uso consapevole dei simboli grafici, della terminologia specifica: esposizione verbale e non)*

- Usare consapevolmente strumenti e tecniche di calcolo.
- Formalizzare e risolvere problemi.
- Potenziare capacità linguistiche (codici verbali e non verbali, specifici e formalizzati).

Competenza *(Rielaborazione delle conoscenze)*

- Comprendere le potenzialità e i limiti delle conoscenze scientifiche.
- Cogliere analogie di strutture tra ambiti diversi.
- Matematizzare (generalizzare, astrarre, modellizzare) situazioni problematiche di varia complessità
- Utilizzare modelli.
- Derivare proprietà, relazioni tra ambiti diversi.
- Scegliere i percorsi logici più appropriati con autonomia critica ed originalità.
- Utilizzare anche editor di testi e foglio elettronico.

ESPERIENZA AL PRIMO BIENNIO

In natura, le osservazioni di un fenomeno fisico mostrano che una quantità varia in dipendenza di altre: questo fa scaturire il desiderio di individuare una relazione funzionale che esprima questo legame, in modo da generalizzare e poter fare previsioni. Questo atteggiamento è alla base del metodo scientifico: fu Galileo Galilei, il primo a introdurre formalmente tale metodo scientifico, abbandonando la ricerca delle *essenze primarie* o delle *qualità* (proposito della filosofia aristotelica), con la riduzione della realtà a puro fatto **quantitativo** e matematico. Galilei introdusse l'osservazione empirica come elemento di partenza, che portò a considerare "scienza" solo quel complesso di conoscenze ottenute dall'esperienza e a questa funzionali, con lo scopo di fare un'analisi **qualitativa** della realtà. Il celebre scienziato pisano scrisse poi ne "Il Saggiatore" la celebre frase che ciascun insegnante ripropone a scuola, per cercare di motivare gli studenti:

« *La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.* **»**

Alla luce di questa illustre considerazione, ho pensato di presentare ai ragazzi di un primo anno di liceo, un'esperienza, facilmente riproducibile (così come si richiede alle osservazione del metodo scientifico). Occorre solo un elastico (o più di uno) e si fa osservare ai ragazzi quello che succede.

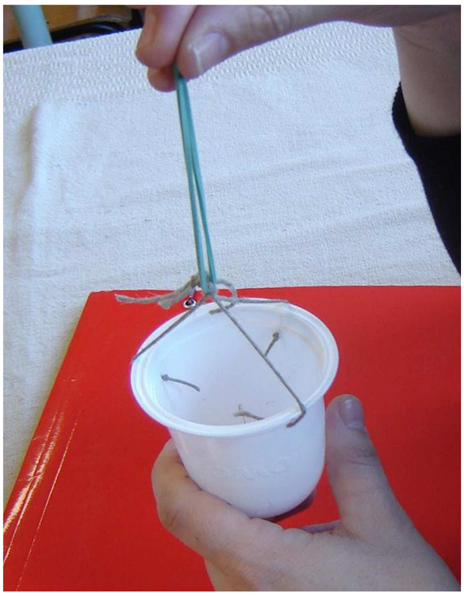
ESPERIENZA DA PROPORRE IN CLASSE

Materiale occorrente:

- Elastico
- Bilancia (portata di grammi)
- Piccoli oggetti degli studenti (gomme, penne, etc…)
- Un vasetto di yogurt vuoto

Esperienza diretta

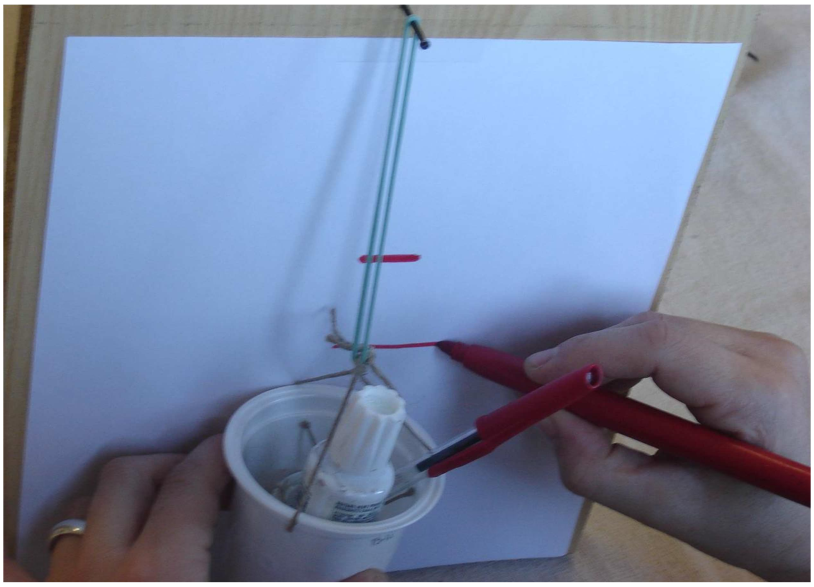
Da una semplice analisi, emerge che tirando l'elastico (AZIONE), corrisponde una deformazione dell'elastico (REAZIONE): logicamente gli studenti sono portati a collegare la causa dell'applicazione della forza all'effetto di alterazione della geometria dello stesso, individuando una relazione tra le due osservazioni.



Introduzione al modello matematico

- Fase 1: Costruzione del modello

  Dopo l'osservazione diretta, il problema viene tradotto in linguaggio matematico nel modo seguente: si fissa il dispositivo elastico ad un'estremità. Si considerano vari pesetti che si possono agganciare all'estremità libera e si misura l'allungamento dello stesso. Gli studenti fanno una rilevazione di misure successive, osservando la **diretta proporzionalità** tra massa agganciata all'estremità libera e allungamento del dispositivo elastico (cenno alla legge di Hooke e legge di Young).



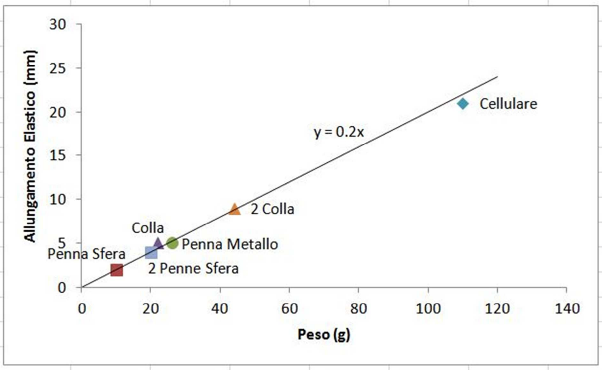
- Fase 2: Studio del modello

  A questo punto, il lavoro si svolge tutto all'interno del mondo matematico con l'elaborazione del modello: in questo semplice esempio si evince un andamento lineare, all'aumentare della massa si ha un allungamento maggiore e viceversa. Gli studenti sono in grado di rappresentare e analizzare l'insieme dei dati anche utilizzando strumenti informatici (aspetto numerico-computazionale), ad esempio con un foglio di calcolo, distinguendo tra caratteri qualitativi, quantitativi discreti e quantitativi continui.

  La formalizzazione del modello, individuando la semplice funzione lineare (aspetto grafico-geometrico), risponde esattamente all'obiettivo formativo indicato dal decreto ministeriale.

Elastico Gomma sottile

Oggetto	Peso applicato (g)	Allungamento Elastico (mm)
Penna Sfera	10	2
Penna Metallo	26	5
Colla	22	5
Cellulare	110	21
2 Colla	44	9
2 Penne Sfera	20	4



  Questa fase promuove un'analisi critica del problema, che porta i ragazzi a formulare giudizi, valutare possibili soluzioni e/o fare previsioni.

- Fase 3: Validazione del modello

  Dalla natura matematica del problema, affrontato nella fase precedente, si torna al mondo reale per verificare l'impatto con la realtà delle soluzioni trovate "a tavolino": quindi gli studenti sono portati a raffrontare con l'esperienza diretta se il modello risponde alle esigenze della problematica in oggetto. Dal modello possono fare una previsione di allungamento dell'elastico e poi verificarla sperimentalmente (ad esempio mettendo un bianchetto nel vasetto misuro x cm, mettendo due bianchetti dovrei misurare 2x cm).

- Fase 4: Perfezionamento del modello
  La fase di validazione sarà soggetta ad errori di varia natura, che offrono spunto di riflessione per un parallelismo interdisciplinare con la teoria degli errori, argomento che i ragazzi affrontano in Fisica.

Da questa esperienza diretta, emerge chiaramente un primo aspetto fondamentale della matematica: l'approccio numerico-computazionale, che per gli studenti odierni è chiaramente un modo più vicino alle loro abitudini e quindi un linguaggio comune, che consente di coinvolgerli maggiormente. Successivamente l'approccio grafico-geometrico, è stato incentivato per formalizzare l'esperienza, senza però perdere la consapevolezza del significato pratico che vi sta alla base.

A questo punto, è possibile passare all'aspetto simbolico-formale: sicuramente nel corso dell'esperimento si parlerà di *relazione tra le grandezze coinvolte*, che nel linguaggio comune indica un legame fra cosa e cosa, o persona e persona o tra idea e idea. Ad esempio le relazione di parentela, il rapporto tra il docente e gli studenti, che mettono in corrispondenza due o più persone, e nel caso dell'esperimento la relazione tra elastico e forza applicata, che definisce una corrispondenza tra le due cose.

In matematica si ricorre ad una definizione generale di relazione tra insiemi:

- Una **relazione binaria** tra due insiemi A e B è una corrispondenza fra coppie di elementi (a, b), $a \in A$ e $b \in B$.

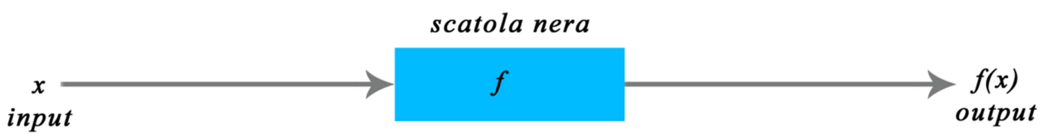
Gli esempi fatti in precedenza sono tutte relazioni binarie, che però presentano interessanti differenze:
- Una persona può avere più fratelli e una madre più figli, ma un figlio ha un solo padre;
- Uno studente ha un solo insegnante di matematica, che ha sua volta ha più studenti;
- Nell'esperimento ad una massa corrisponde un allungamento dell'elastico e viceversa.

Il concetto di funzione entra in gioco per esprimere una particolare relazione binaria:

- Una **funzione** $f: A \to B$ è una relazione binaria tra due insiemi A e B tale che **ad ogni elemento** $a \in A$ corrisponde **uno ed un solo** elemento dell'insieme B. L'insieme A è detto **dominio** e si indica anche con $Dom\ f$ della funzione e l'insieme B è il **codominio** della funzione, che si indica con $Cod\ f$.

Quindi le relazioni "avere fratelli", "avere figli" non sono funzioni, ma "avere padre" lo è, "avere insegnante di matematica" è una funzione, ma "avere studenti" no. L'esperienza fatta in classe della deformazione elastica è la visualizzazione di una funzione.

Il concetto può essere semplificato schematizzandolo così:

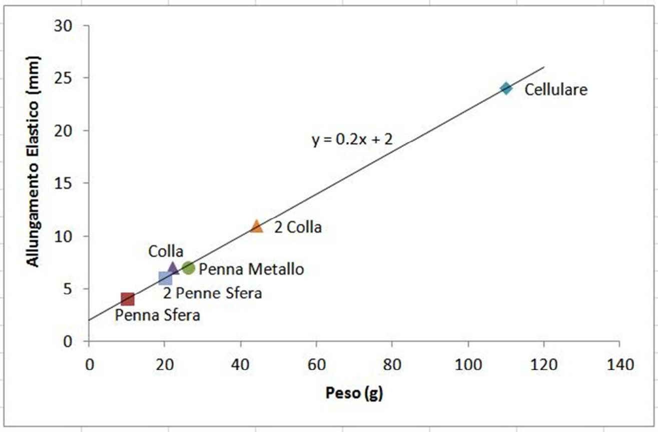


L'esperimento consente di far una riflessione ancora più approfondita: noto l'allungamento, posso anche risalire alla massa che è stata appesa. La natura di un materiale elastico è proprio quella di deformarsi in maniera proporzionale all'azione di una sollecitazione applicata (entro i limiti del punto di snervamento, ovviamente) e di riacquistare il suo stato iniziale, nel momento in cui viene meno la causa sollecitante. Oltre che a prendere coscienza di uno dei principi base della teoria dell'elasticità (una branca della meccanica dei solidi), gli studenti possono riflettere proprio su un concetto analitico fondamentale: la composizione e l'invertibilità delle funzioni.

La composizione di funzione può essere spiegata nell'esperienza, agganciando più masse insieme all'estremità libera e non prendendole singolarmente, come si fa in un primo momento. Si può far notare loro come nella tabella, i dati risultano traslati e come questo si riscontra graficamente, con una retta non passante per l'origine degli assi cartesiani. E' importante notare come può essere presentata in maniera alternativa la funzione di traslazione: la natura geometrica del concetto viene valorizzata anche dall'approccio pratico, "alternativo" a quello che viene proposto nell'ambito della geometria (affinità).

Elastico Gomma sottile + vasetto yogurt

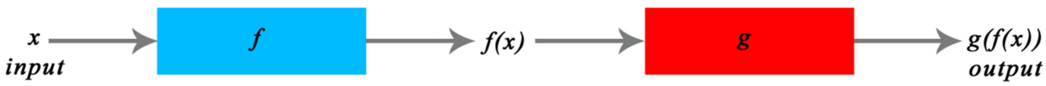
Oggetto	Peso applicato (g)	Allungamento Elastico (mm)
Vasetto Yogurt	tara	2
Penna Sfera	10	4
Penna Metallo	26	7
Colla	22	7
Cellulare	110	24
2 Colla	44	11
2 Penne Sfera	20	6



Formalmente

- Siano f e g due funzioni assegnate. Se $Cod\ f \subset Dom\ g$, è possibile comporre la funzione g dopo la funzione f; in tal caso la funzione composta $g \circ f: Dom\ f \ \to Cod\ g$ è definita

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big), x \in Dom\ f$$



Da un'analisi dei dati, gli studenti possono già osservare questa proprietà, di passare dalla colonna delle masse a quelle dell'allungamento in maniera indifferente. Anche l'interpretazione geometrica può subito essere presentata: ogni retta orizzontale interseca il grafico al più in un punto.
Formalmente, assegnata una funzione $f: Dom\ f\ \to Cod\ f$, ci si chiede se esiste una funzione $f^*: Cod\ f\ \to Dom\ f$ tale che $f^*\big(f(x)\big) = x$ per ogni $x \in Dom\ f$.

Nell'esperimento proposto, gli studenti possono prendere coscienza di una proprietà fondamentale delle funzioni:

- Una funzione f si dice **iniettiva** se per ogni coppia $x_1, x_2 \in Dom\ f$ con $x_1 \neq x_2$ allora $f(x_1) \neq f(x_2)$.

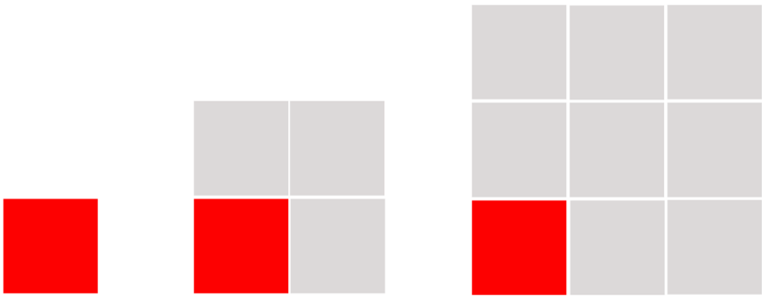
E si può osservare come l'iniettività è una condizione necessaria per l'invertibilità. Anzi si prova che è condizione anche sufficiente, come viene enunciato nella seguente proposizione:

- $f: Dom\ f\ \to Cod\ f$ è invertibile $\Leftrightarrow f$ è iniettiva.

Presentare il concetto di funzione come deformazione, può essere utile anche per introdurre le altre funzioni: ad esempio la funzione quadratica o la cubica.

Funzione quadratica come espansione o contrazione areale

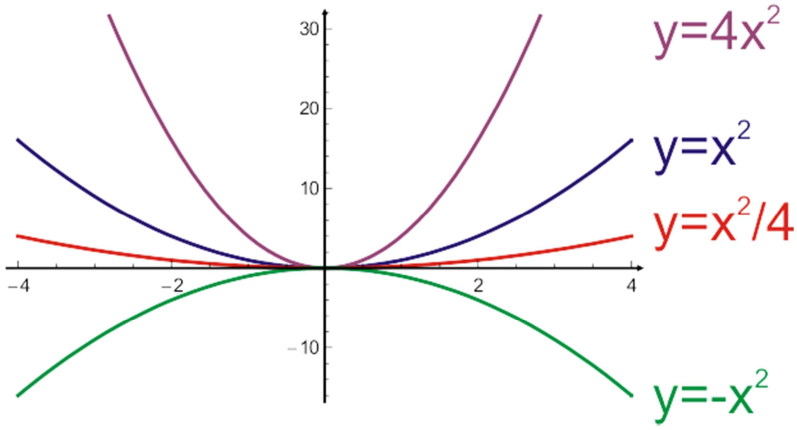
Si consideri un quadrato di l. Si fa osservare agli studenti come si modifica l'area del quadrato se il lato l raddoppia, triplica e così via. Per trovare la relazione funzionale tra deformazione del lato l e quella dell'area del quadrato, si può partire osservando la seguente figura:



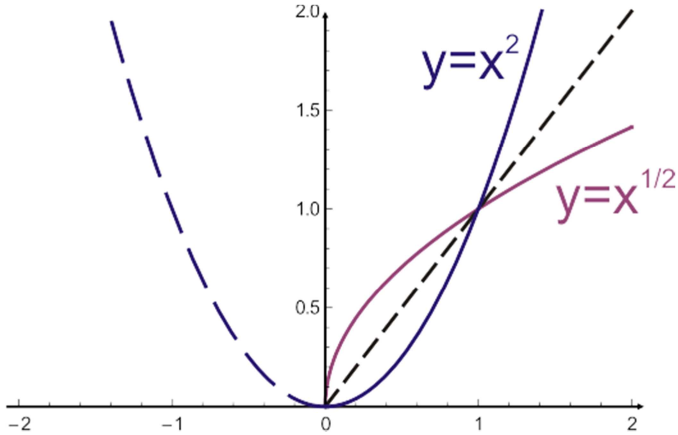
Poi si può far analizzare una tabella di dati, per delineare meglio la situazione:

	Caso non deformato	Prima deformazione	Seconda deformazione	...
Lato	l	$2l$	$3l$	
Area	l^2	$4l^2$	$9l^2$	

Si trova così l'andamento quadratico di crescita, a partire da una deformazione, che in matematica viene formalizzata come similitudine (e si può far notare gli invarianti della figura, che sono la continuità, la convessità, il parallelismo e la forma). In questo modo si prende piena coscienza con la realtà geometrica di quello che sta accadendo, facendo leva proprio sull'intelligenza visiva, a partire dalla quale si promuove un'analisi critica, che consente di introdurre in seguito all'analisi discreta dei dati, la formalizzazione $f(x) = x^2$ (dal quantitativo al qualitativo).
Successivamente alla formalizzazione, si possono rileggere le trasformazioni omotetiche della funzione quadratica come casi particolari di deformazione: contrazione o espansione della funzione quadratica.

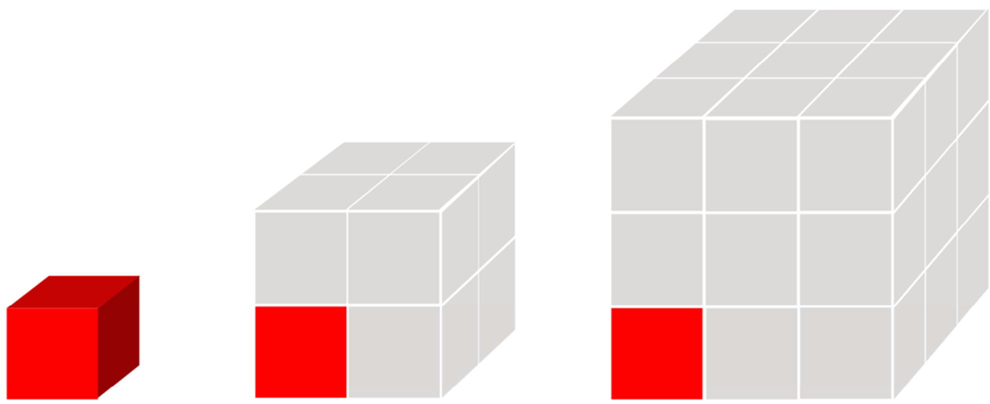


Facendo poi riferimento all'esperienza visiva e geometrica, è possibile presentare anche il concetto di invertibilità: a partire dall'area dei quadrati infatti si risale alla misura del lato. Questo è modo per introdurre la funzione $f(x) = \sqrt{x}$, facendo riflettere gli studenti proprio sul fatto che si sta partendo da misure ("quantità positive"). Si solleva poi la questione in modo formale a proposito dell'invertibilità della funzione quadratica a partire dal suo grafico.



Funzione cubica come espansione o contrazione volumica

In analogia a quanto fatto sopra, si considera un cubo di l. Si fa osservare agli studenti come si modifica il volume del cubo se il lato l raddoppia. Per trovare la relazione funzionale tra deformazione del lato l e quella del volume del cubo, si può partire osservando la seguente figura:

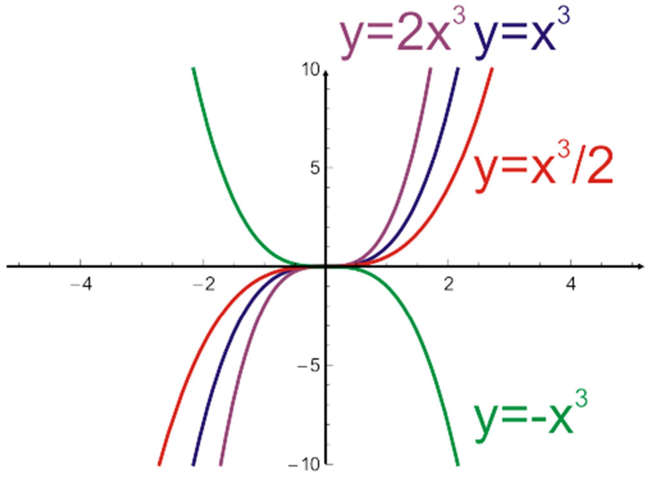


Poi si può far analizzare una tabella di dati, per delineare meglio la situazione:

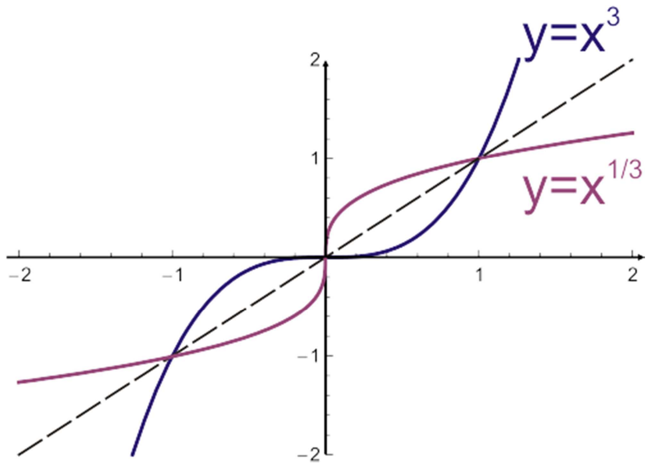
	Caso non deformato	Prima deformazione	Seconda deformazione	…
Lato	l	$2l$	$3l$	
Volume	l^3	$8l^3$	$27l^3$	

Si trova così l'andamento cubico di crescita, a partire da una deformazione. Anche a partire da questa osservazione diretta si promuove un'analisi critica, che consente di introdurre in seguito $f(x) = x^3$.

Successivamente alla formalizzazione, si possono rileggere le trasformazioni omotetiche della funzione cubica come casi particolari di deformazione: contrazione o espansione della funzione cubica.

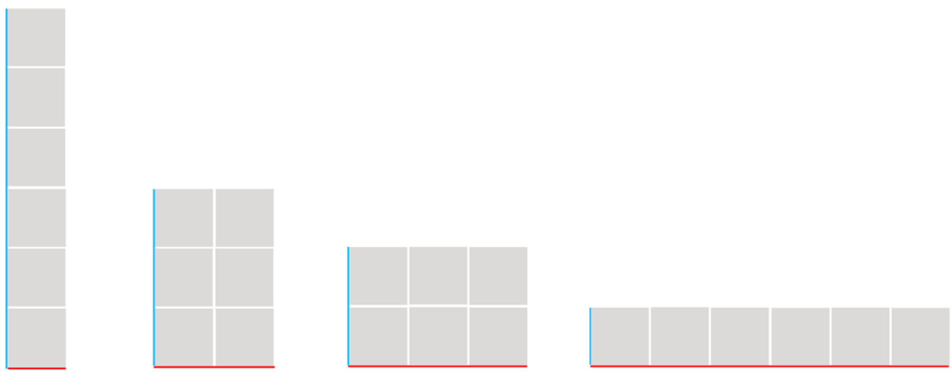


E anche in questo caso, si fanno riflettere gli studenti sull'invertibilità della funzione cubica:

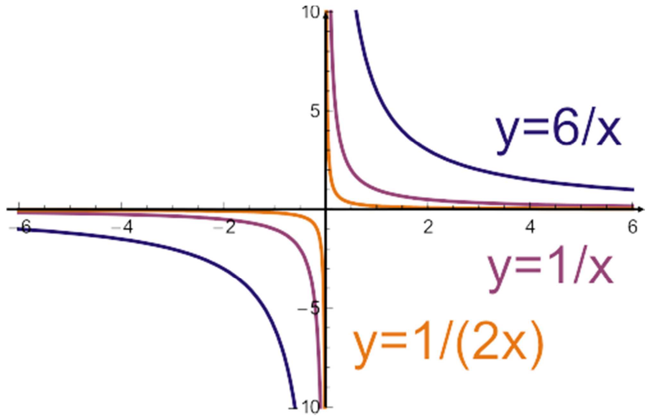


Funzione razionale del tipo $f(x) = k/x \ (x \neq 0)$ come deformazione con vincolo

Si considera stavolta un rettangolo di base b e altezza h. Si vuole deformare questa figura piana in modo tale che la sua area resti invariata. Si può allora considerare la seguente figura:



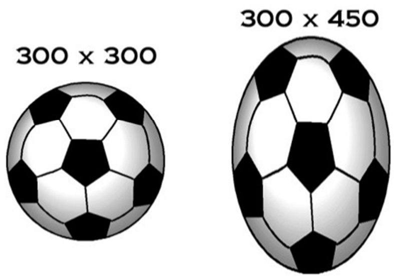
Operativamente si nota che al crescere della misura della base b diminuisce la misura dell'altezza h dei rettangoli in questione: si prende piena coscienza del concetto **proporzionalità inversa**. La formalizzazione grafica, con l'opportuna scelta del parametro reale k (ad esempio, da sopra $k = 6$), promuove l'analisi critica.
Successivamente alla formalizzazione, si possono rileggere le trasformazioni omotetiche della funzione razionale $f(x) = k/x \ (x \neq 0)$ come casi particolari di deformazione: contrazione o espansione della funzione stessa.



ESPERIENZA AL SECONDO BIENNIO

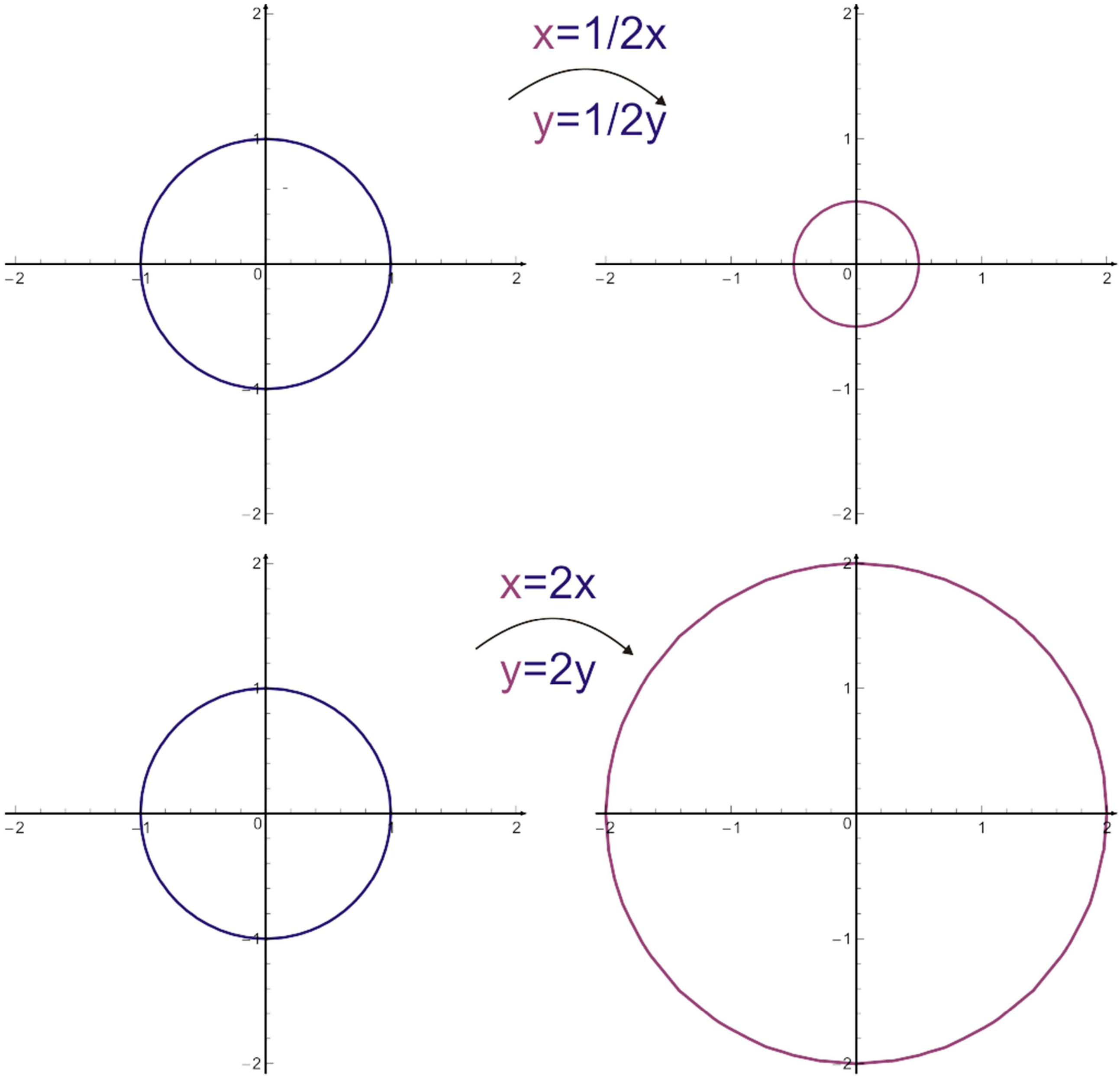
Per convalidare quanto presentato nel primo biennio, nella fase successiva si può trasporre il concetto di deformazione per la presentazione di alcune sezioni coniche.

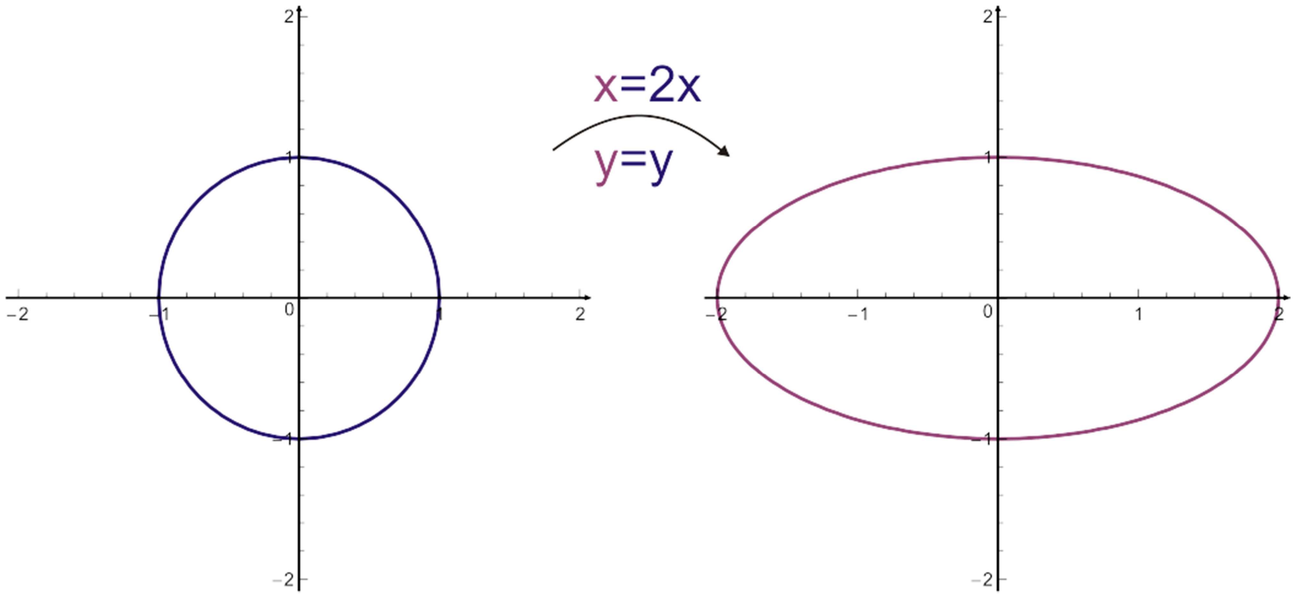
L'idea è quella di considerare un esempio vicino alla realtà degli studenti: nell'era dei social network utilizzati a mo' di diario, i ragazzi adoperano continuamente immagini nei vari formati elettronici (JPG, PNG, BMP, GIF), magari prendendo consapevolezza con l'esperienza diretta di problemi legati alla risoluzione, occupazione di spazio, qualità dell'immagine stessa, etc. A questo proposito si può proporre una semplice esperienza diretta: la deformazione delle immagini su schermo.

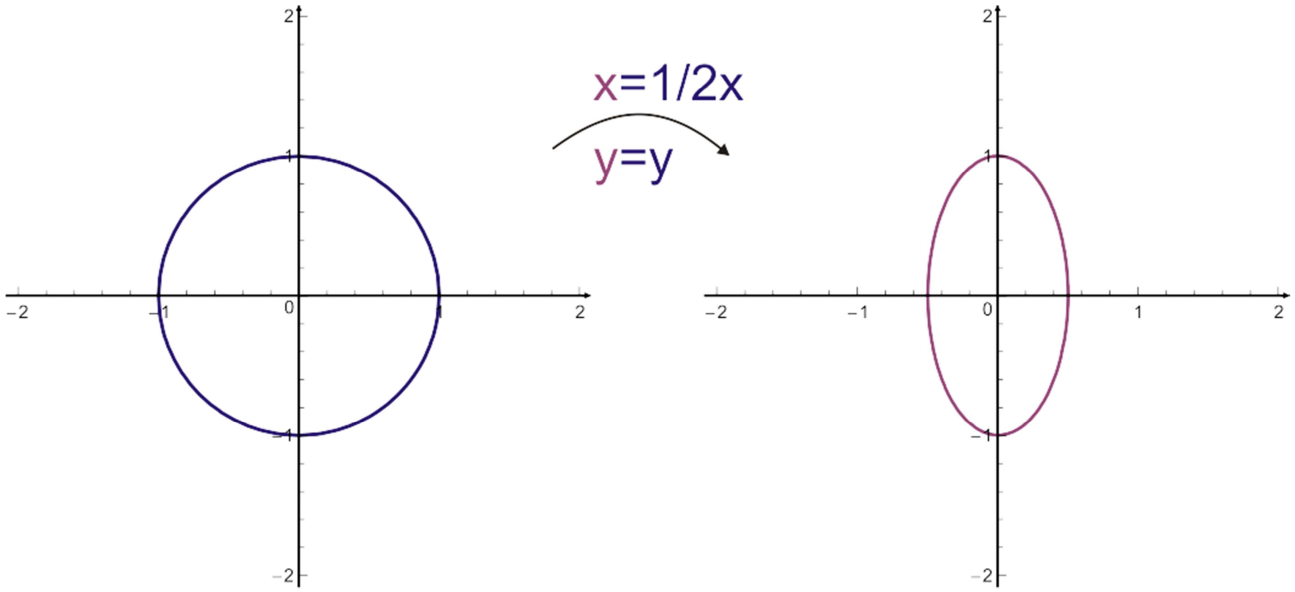


Partendo così dall'esperienza diretta, si possono studiare alcune coniche, di solito presentate *da un punto di vista geometrico sintetico e analitico* (nota a piè pagina).

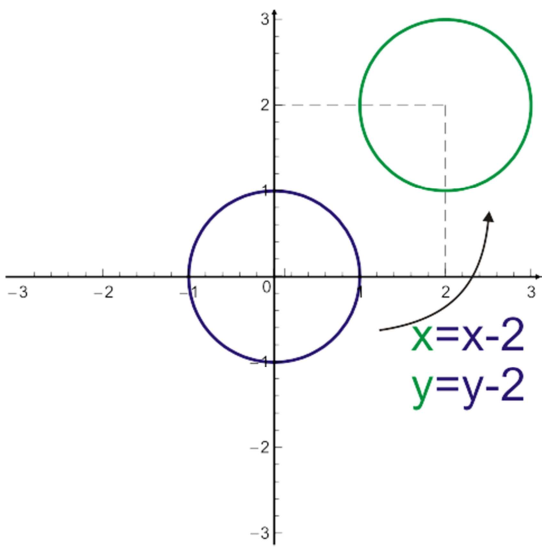
Vengono di seguito presentati alcuni semplici esempi di omotetie applicate alla circonferenza, di cui alcune che danno luogo ad ellissi.

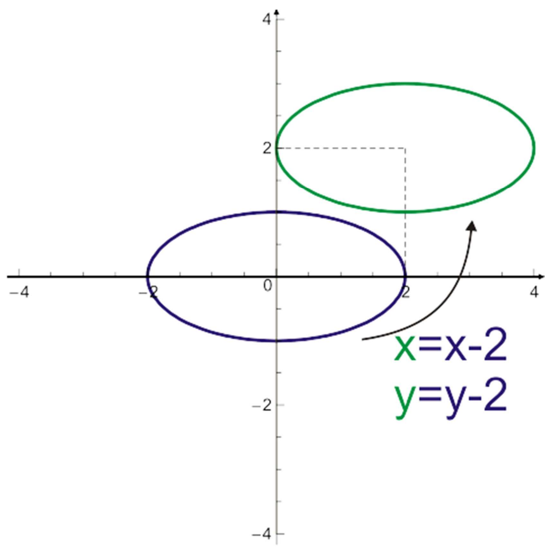

x=1/2x
y=1/2y
x=2x
y=2y

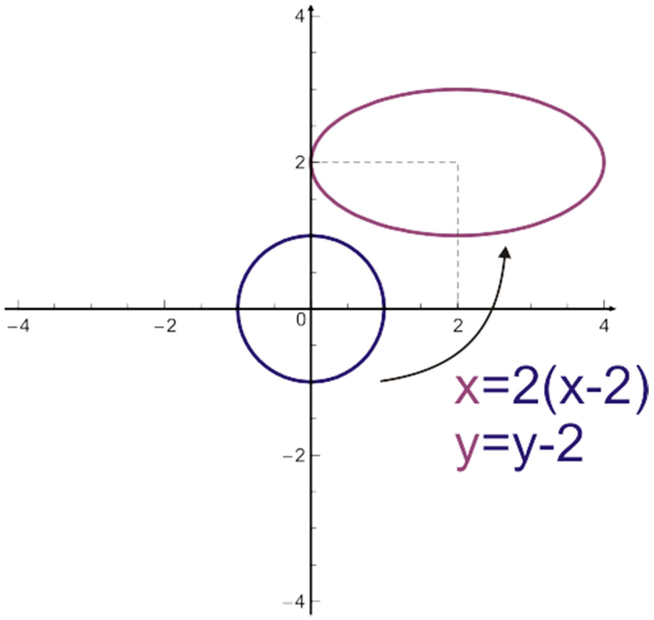




Anche il concetto di traslazione viene ripresentato a partire dai seguenti esempi geometrici:







ESPERIENZA AL QUINTO ANNO

Per concludere questo percorso didattico, viene proposto ai ragazzi del secondo biennio di riconsiderare l'esperienza vista negli anni precedenti, ma con occhio più critico e più vicino alla realtà.

A tale scopo, può essere adoperato un laccio emostatico e si ripete l'esperienza della deformazione:

Un'attenta analisi della deformazione dell'elastico in questione porta i ragazzi ad osservare che in realtà la cavità cilindrica si allunga lungo la direzione orizzontale, restringendosi in sezione. L'obiettivo è quello di far prendere coscienza del concetto di incomprimibilità del materiale, facendo per l'appunto osservare che il volume del dispositivo

resta lo stesso, durante le varie deformazioni. L'incomprimibilità introduce quindi il concetto di conservazione di una grandezza, cioè il concetto di vincolo per una grandezza fisica, espressa in termini di una legge nota.
Molto spesso, infatti, nei test di accesso a diverse università, vengono posti dei quesiti nei quali una grandezza fisica (che è espressa in funzione di altre), varia e si vuole sapere cosa viene modificata in un'altra. Ad esempio:

- *"Sulla superficie di un pianeta delle stesse dimensioni della Terra, ma di massa doppia, un pendolo che sulla Terra oscilla con periodo di un secondo, che periodo avrebbe?"* ($T = \frac{1}{\sqrt{2}}$ s)
- *"Un astronauta ha peso P sulla Terra. Quale sarebbe il suo peso su un pianeta avente la stessa densità della Terra ma raggio triplo?"* (*3P*)