ANDREA PIETROPAOLO

I MODELLI LINEARI

Unità didattica ad uso degli alunni del III anno Liceo scientifico
Classe di tirocinio: A049
A.A. 2011/2012

I MODELLI LINEARI

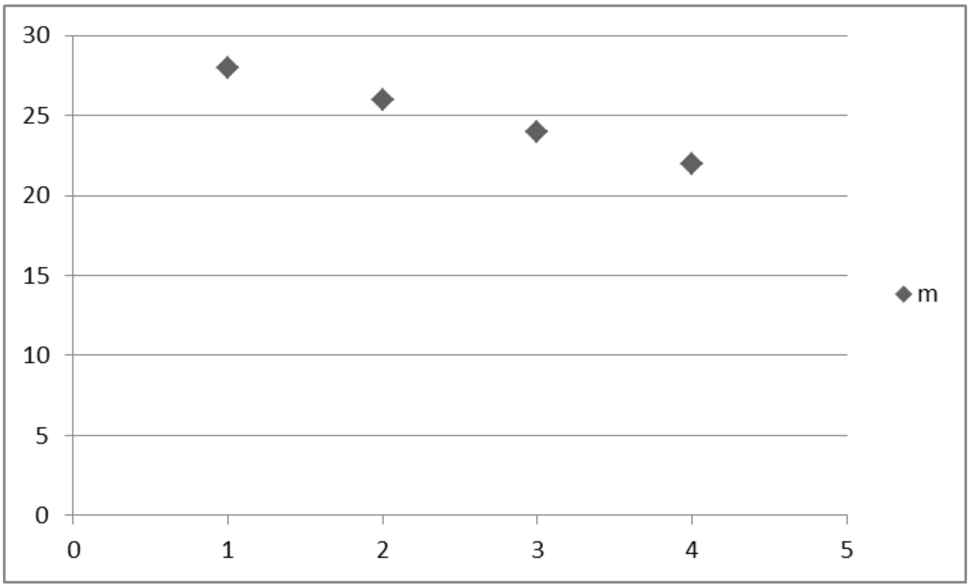
1- Il concetto di linearità e lo studio della retta

Vediamo come il concetto di linearità è presente in molti ambiti della matematica in svariati modi, talvolta molto diversi tra loro. Eppure questi hanno in comune la stessa logica, le stesse proprietà e le stesse conclusioni.
Cominciamo con un esempio molto semplice.

Esempio 1 – Curiosando nell'albero genealogico …
In Italia un numero sempre più grande di persone, alla ricerca delle proprie origini, si interessa della ricostruzione della propria storia familiare; anche gli Archivi di Stato, di fronte a richieste sempre più frequenti, si stanno muovendo per digitalizzare i propri registri dello Stato civile e per inserire on-line fotografie di registri ottocenteschi.
Tizio ha realizzato un albero genealogico comprensivo delle date di nascita, matrimonio e morte dei suoi antenati e, nel completare il suo studio, vuol effettuare delle analisi statistiche di vario tipo. In particolare, vuole conoscere come è cambiata l'età media in cui ci si sposava nel corso delle generazioni; verifica quindi se c'è una correlazione tra il numero delle generazioni prima di lui *g* e l'età media (di tutti gli avi di una stessa generazione non distinguendo tra uomo e donna) *m* in cui i suoi antenati si sono sposati. Per ogni generazione effettua una media sui due sessi (arrotondata all'unità) e trova i seguenti dati:

Parentela:	**Genitori**	**Nonni**	**Bisnonni**	**Trisavoli**
N. generazioni (*g*):	**1**	**2**	**3**	**4**
Età media del matrimonio (*m*):	**28**	**26**	**24**	**22**

Analizziamo la relazione funzionale tra *m* e *g* e riportiamola su un grafico:



Si trova che $m = m(g)$ e che la relazione è **lineare**: infatti i punti tracciati sul grafico descrivono una linea retta.
In particolare si vede che, se si calcola il rapporto: $R = (m_{i+1} - m_i)/(g_{i+1} - g_i)$ (con *i* che varia da 1 a 3) si può vedere che esso è costante al variare delle coppie di punti nel grafico. In questo caso: $R = -2$.

Quindi, se consideriamo la retta passante per i punti sopra, diremo che un punto $P=(g,m)$ appartiene a tale retta se soddisfa la seguente equazione:

$$(m_i - m)/(g_i - g)= (m_1 - m)/(g_1 - g)= (28 - m)/(1 - g)= -2$$

cioè:

(1) $$m= -2\cdot g + 30$$

A questo punto, ammettendo che tale legge si mantenga anche per le generazioni future della famiglia di Tizio, ci aspettiamo che i suoi figli si sposeranno mediamente a 32 anni, i suoi nipoti a 34 ecc.

D'altra parte, andando a ritroso nel tempo, dalla (1) si potrebbe dedurre che i trisavoli dei suoi trisavoli (ottava generazione – vissuta presumibilmente nel '700) si sarebbero sposati mediamente a 14 anni mentre alla quindicesima generazione (metà '500) si sarebbero uniti in matrimonio a … 0 anni! E' chiaro quindi che in questo caso il modello lineare può sussistere solo per un numero abbastanza ristretto di generazioni, ma non possiamo fare previsioni sul futuro e deduzioni del passato basandoci su di esso, a prescindere dal fatto che comunque non possiamo stabilire a priori quando i componenti della famiglia di Tizio incontreranno l'anima gemella!

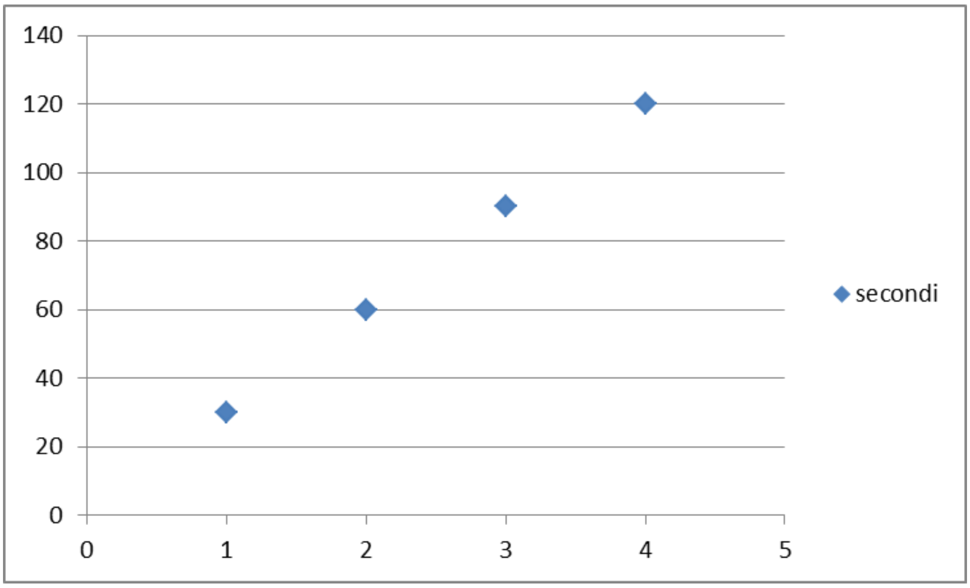
Esempio 2 – Padre e figlio in bici.

Una famiglia decide di fare una passeggiata in bicicletta lungo una pista ciclabile. Tiziana va avanti per prima ed attende suo figlio Mattia e suo marito Andrea a due km dall'inizio della pista, indicato col km 0. Alle 5.05 del pomeriggio Mattia parte dal km 1 e, pedalando a velocità costante, giunge dalla madre dopo 10 minuti; Andrea invece ha temporeggiato in quanto ha dovuto sistemare sellino e gomme: si incammina quindi verso Tiziana alle 5.10 e, anch'egli partendo dal km 1 e pedalando a velocità costante, arriverà dopo 8 minuti. Chi è andato più veloce?

Questo è un classico problema di fisica, che si risolve introducendo la grandezza fisica velocità e analizzando il moto di padre e figlio. Tuttavia possiamo dedurre le stesse cose senza introdurre necessariamente nulla di specificatamente fisico ma facendo delle semplici considerazioni.

Innanzitutto sia Mattia che Andrea viaggiano a velocità costante. Che significa? Quando ad esempio viaggio in autostrada a 120 km/h e leggo sia i kilometri fatti che il tempo trascorso, mi accorgo che per fare un km impiego esattamente 30 secondi, per fare 2 km impiego un minuto e così via. Se invece accelero e freno, allora questa proporzione non vale più.

Pertanto, anche in questo caso mi trovo di fronte ad un modello lineare: disegnando, su un grafico cartesiano, il tempo sulle ascisse e lo spazio percorso sulle ordinate, mi accorgo che i punti ottenuti dalle coppie di dati si dispongono su una linea retta.



Con questa premessa, torniamo al nostro esempio.
Dunque, noi sappiamo che sia Mattia che Andrea viaggiano a velocità costante, ma – attenzione – probabilmente a due velocità diverse. Da cosa ce ne accorgiamo? Dal fatto che Andrea è partito 5 minuti più tardi ed ha percorso lo stesso spazio raggiungendo Tiziana solamente 3 minuti dopo Mattia.
Ricapitoliamo i dati per maggiore chiarezza:

Personaggio	**Tempo di partenza**	**Tempo di arrivo**	**Durata del viaggio**	**Posizione partenza**	**Posizione arrivo**	**Spazio percorso**
Mattia	**Ore 5.05**	**Ore 5.15**	**10 minuti**	**1 km**	**2 km**	**1 km**
Andrea	**Ore 5.10**	**Ore 5.18**	**8 minuti**	**1 km**	**2 km**	**1 km**

Posso quindi dire che Mattia percorre spazi costanti in tempi costanti - secondo quanto dedotto nell'esempio 1 - con la legge lineare:

$$s_M = 1\text{ km} + v_1 \cdot (t - 5.05)$$

dove 1 km è il posto in cui si trovava Mattia al momento della partenza e 5.05 è l'orario di partenza. Se sostituisco ad s lo spazio finale a a t il tempo di arrivo, troverò la costante v_1 che è pari a: v_1=0,1.

Pertanto, se Mattia prosegue il suo viaggio andando allo stesso ritmo, posso trovare in quanto tempo si troverà al km 3 o al km 4 a partire dalla legge:

(2) $$s_M = 1\text{ km} + 0{,}1 \cdot (t - 5.05)$$

Troverò in particolare che raggiungerà il km 3 alle ore 5.25 e il km 4 alle 5.35.

Veniamo ora ad Andrea. Anche egli percorre spazi costanti in tempi costanti ma – attenzione – cambia la costante di proporzionalità tra spazio e tempo. Andiamo a dedurla:

$$s_A = 1\text{ km} + v_2 \cdot (t - 5.10)$$

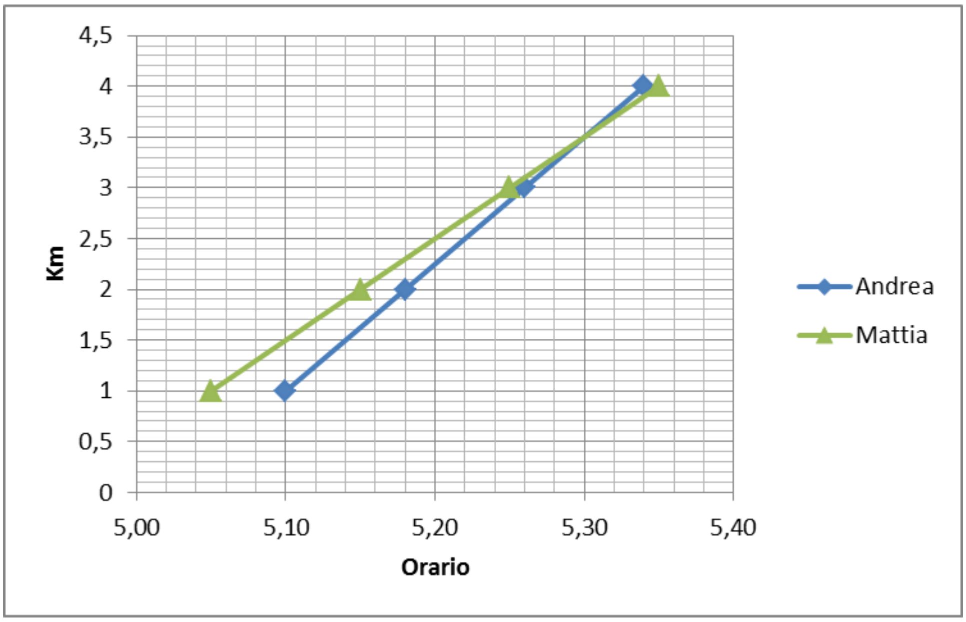
Sapendo che Andrea raggiunge Tiziana alle 5.18 troveremo – con lo stesso metodo – che v_2=0,125.
Pertanto egli seguirà la legge:

(3) $$s_A=1\text{ km}+0{,}125\cdot(t - 5.15)$$

Se decidesse di proseguire alla stessa velocità, troveremo che raggiungerà il km 3 alle ore 5.26 e il km 4 alle 5.34.
Rappresentiamo graficamente il tutto e troveremo delle conseguenze molto interessanti (*v. immagine della pagina seguente*).

Innanzitutto le due rette hanno diversa pendenza, determinata dai coefficienti v_1 e v_2. In particolare, vediamo che, essendo $v_1 < v_2$, la retta verde (Mattia) ha minore pendenza di quella azzurra (Andrea). Pertanto possiamo dire che la pendenza della retta rappresenta una maggiore o minore rapidità di variazione di una variabile in funzione dell'altra.

L'altro aspetto interessante è il fatto che ad un certo punto le rette si incrociano. In quale istante di tempo e a che km avviene? Alle ore 5.30 e al km 3.5. In quel posto e in quel momento Andrea raggiungerà Mattia, dopo di che lo supererà.



Matematicamente avremmo raggiunto lo stesso risultato imponendo che nella (2) e nella (3) sia gli spazi finali che i tempi *t* avrebbero dovuto essere uguali.

2- Il tasso di variazione

Definizione. Data una qualsiasi funzione $f(x)$, considerati due punti x_1 e x_2 appartenenti al dominio della f, si definisce il ***tasso di variazione medio*** m come segue:

(4) $$m=\Delta f/\Delta x= [f(x_2) - f(x_1)]/(x_2 - x_1)$$

dove si è indicato con Δx la variazione della x, detta *incremento della variabile* e con Δf la variazione della f, detta *incremento della funzione*.

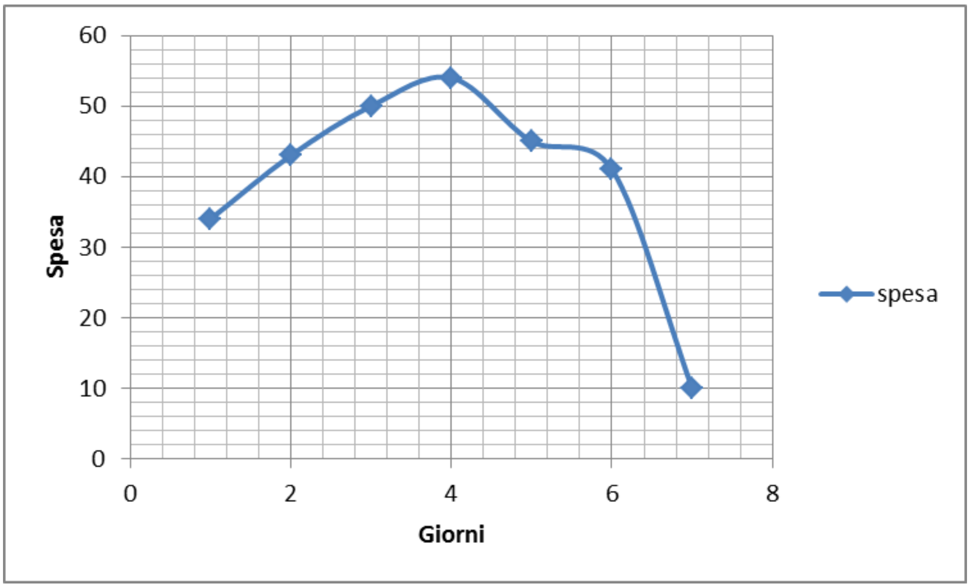
E' chiaro che, nel caso in cui la $f(x)$ è rappresentata una retta, il tasso di variazione medio m coincide con il coefficiente angolare della stessa.

Cosa succede invece per una funzione qualunque? Facciamo un altro esempio.

Esempio 3 – Nicola ha redatto un elenco delle spese effettuate la settimana scorsa. Calcolare il tasso di variazione medio della settimana e – separatamente – quelli tra due giorni consecutivi.

Giorno	**Lunedi 1**	**Martedi 2**	**Mercoledi 3**	**Giovedi 4**	**Venerdi 5**	**Sabato 6**	**Domenica 7**
Spesa €	**34 €**	**43 €**	**50 €**	**54 €**	**45 €**	**41 €**	**10 €**

Calcoliamo il tasso di variazione tra lunedi e domenica applicando la (4): $m_{17}= - 4$. Vediamo che esso è negativo.
Calcoliamo ora i tassi di variazione tra due giorni consecutivi: $m_{12}=9$; $m_{23}=7$; $m_{34}=4$; $m_{45}= - 9$; $m_{56}= - 4$; $m_{67}= - 31$. Notiamo ora che nei primi giorni è positivo, anche se decresce, mentre negli ultimi è negativo.



Definizione. Data una funzione $f(x)$ e due punti qualsiasi x_1 e x_2 appartenenti ad un intervallo del dominio di f, tali che $x_1 < x_2$, diremo che, in A:

- la f è *crescente* se $f(x_1) < f(x_2)$
- la f è *non decrescente* se $f(x_1) \leq f(x_2)$
- la f è *decrescente* se $f(x_1) > f(x_2)$
- la f è *non crescente* se $f(x_1) \geq f(x_2)$

Nel primo caso il tasso di variazione è: $m > 0$; nel secondo caso $m \geq 0$; nel terzo $m < 0$ e nel quarto $m \leq 0$.

La definizione di crescenza e decrescenza appena data è semplice e intuitiva: in un grafico la funzione cresce quando "sale verso l'alto", mentre decresce quando "scende in basso".

Osservazione: una funzione definita in un intervallo può essere crescente in un suo sottointervallo, quindi decrescente in un altro sottointervallo e così via. Se essa conserva la crescenza oppure la decrescenza *in tutto* l'intervallo, allora si parla di *funzione monotona crescente* (oppure *monotona non decrescente*).

Supponiamo ora di essere a conoscenza dell'espressione di una funzione $f(x)$ definita in R e passante per i punti dell'esempio sopra riportato.

Dal calcolo dei tassi di variazione possiamo vedere che nei primi quattro giorni la funzione è crescente mentre a partire dal quarto giorno decresce. La sua decrescita è tanto più veloce quanto più è negativo m.

Il tasso di variazione tra il primo e l'ultimo giorno indica sostanzialmente che la differenza tra valore finale e valore iniziale è negativa, quindi il Nicola del nostro esempio la domenica ha speso meno che il lunedi precedente.

Definizione. Data una funzione $f(x)$ e tre punti qualsiasi x_1, x_2 e x_3 appartenenti ad un intervallo del dominio di f, tali che $x_1 < x_2 < x_3$, diremo che, in A:

- la f è *convessa* se $[f(x_2) - f(x_1)]/(x_2 - x_1) \leq [f(x_3) - f(x_2)]/(x_3 - x_2)$
- la f è *concava* se $[f(x_2) - f(x_1)]/(x_2 - x_1) \geq [f(x_3) - f(x_2)]/(x_3 - x_2)$

Se nelle disequazioni non sussistono gli uguali, si parla di *convessità (o concavità) in senso stretto*.

Analogamente si può dire che la f è convessa se $m_1 \leq m_2$ mentre è concava se $m_1 \geq m_2$.

La definizione di convessità – così formulata – è un po' meno intuitiva della crescenza. Possiamo dire che il grafico di una funzione convessa "descrive una conca" mentre quello di una funzione concava "descrive una collina".

Nell'esempio precedente, supponendo sempre di avere l'espressione algebrica di una funzione definita in R e passante per i punti suddetti, si ha che: $m_{12} > m_{23} > m_{34} > m_{45}$, quindi fino al giorno 5 tale funzione è (strettamente) concava, mentre tra i giorni 5 e 6 diventa convessa per poi tornare concava tra il sesto e il settimo giorno.

3- Le funzioni lineari

Definizione: Una funzione f, che ha come dominio e codominio l'insieme dei numeri reali R, si dice *lineare* se:

1- $f(x_1 + x_2) = f(x_1)+f(x_2)$, per ogni x_1 e x_2 appartenenti a R
2- $h\, f(x) = f(hx)$, per ogni x appartenente a R e per ogni h reale.

Possiamo riassumere queste due proprietà dicendo che:

(5) $$f(h\, x_1 + k\, x_2) = h\, f(x_1) + k\, f(x_2)\,, \text{ per ogni } h \text{ e } k \text{ reali.}$$

Come possiamo interpretare le due caratteristiche sopra enunciate?

La prima sostanzialmente dice che l'effetto totale dato dalla somma (o sovrapposizione) di due eventi distinti ed indipendenti tra loro è pari alla somma degli effetti dato da ciascun elemento.

Esempio 4 – se lancio un dado due volte, che probabilità ho di ottenere un 5 o un 3?

Senza entrare nel merito del calcolo delle probabilità, si capisce che la probabilità di ottenere 5 è la stessa di ottenere 3, che i due eventi sono indipendenti (ad esempio non esce 5 perché prima è uscito 3 o viceversa) e che la probabilità di ottenere un numero oppure l'altro è la somma delle due probabilità.

La seconda proprietà delle funzioni lineari invece afferma che moltiplicando la causa per un fattore *h* anche l'effetto ottenuto è *h* volte l'effetto sulla causa iniziale.

Esempio 5 – Consideriamo una molla; fissiamo un'estremità ad una volta e lasciamo libera l'altra, facendo in modo che la molla sia in posizione verticale. Indichiamo con 0 la posizione dell'estremità libera. Applichiamo un peso di 50 g_p (= grammi-peso) e verifichiamo che l'allungamento della molla è di 0,5 cm. Applichiamo quindi un peso doppio (100 g_p) e osserviamo che l'allungamento della molla è di 1 cm.

La funzione da considerare è:

$F = k\,x$

Dove F è la forza applicata (in questo caso il peso), x l'allungamento misurato e k una costante detta in fisica "costante elastica della molla".

Chiamiamo: $F_1 = 50\ g_p$ e $x_1 = 0{,}5$ cm; $F_2 = 100\ g_p$ e $x_2 = 1$ cm.

E' evidente che $F_1 = f(x_1)$ ed $F_2 = f(x_2)$; inoltre si ha che $x_2 = h\,x_1$, con $h = 2$. Pertanto:

$F_2 = f(x_2) = f(h\,x_1)$.

Ma è evidente anche che $F_2 = h\,F_1 = h\,f(x_1)$. Pertanto: $f(h\,x_1) = f(h\,x_1)$.

Si può ripetere questo procedimento con un peso triplo, quadruplo ecc. (nei limiti dell'elasticità della molla) e si verifica che questa proprietà vale per ogni *h*.

Riguardo alle funzioni reali di variabile reale, si dimostra che le funzioni lineari sopra definite sono tutte e sole quelle che si possono esprimere nella forma $f(x) = m\,x$, rappresentabili tramite una retta che passa per l'origine degli assi.

Con semplici passaggi si trova che la *m* appena definita coincide col tasso di variazione. Essa è quindi costante al variare di *x*; ciò significa che la funzione è monotona e, se $m > 0$, è crescente mentre, se $m < 0$, essa è decrescente. Non ha senso invece parlare di convessità o di concavità proprio perché la *m* è costante.

4- Omotetie

Esempio 6. Il Gran Sasso d'Italia è la montagna più alta degli Appennini, che gode anche di un primato europeo, cioè quello di avere il ghiacciaio più meridionale d'Europa. La sua altitudine è stata fissata in 2912 m s.l.m. ma, misure passate avevano fornito valori leggermente superiori o inferiori. Trovare un metodo, sfruttando le omotetie tra triangoli, per misurarne l'altitudine.

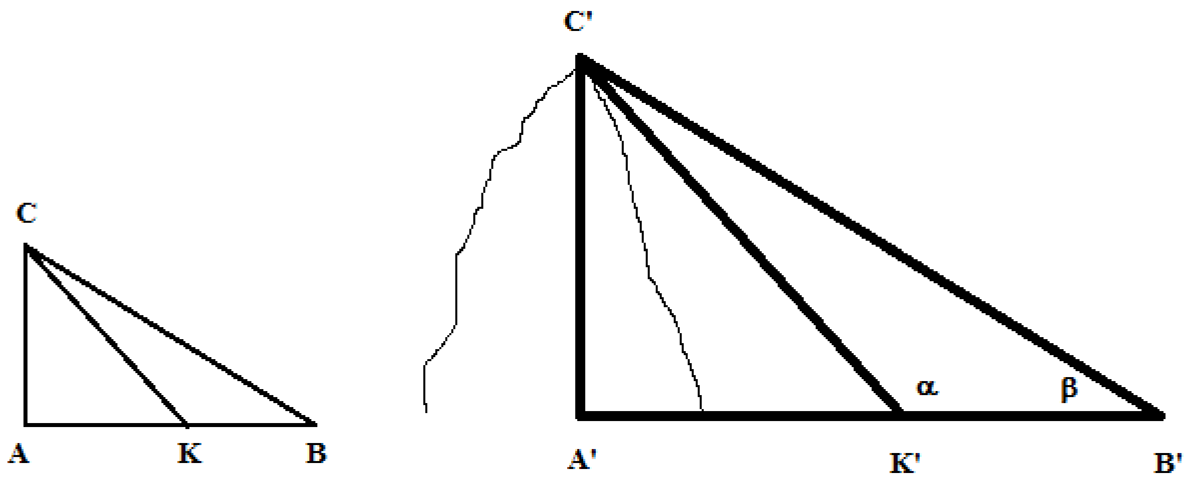
Il classico metodo con cui si misura l'altitudine delle montagne è quello basato sulle *triangolazioni*. Per svolgerlo è però necessario avere delle conoscenze di trigonometria. Non è questo il nostro scopo.

Definizione. Un'*omotetia* di centro A è una trasformazione dello spazio euclideo che "dilata" le distanze da A di tutti i punti secondo un fattore *c*, lasciando invariate le rette passanti per A che per questo si dicono *rette unite*.

Consideriamo quindi un'omotetia di un triangolo ABC secondo un fattore $c > 0$. Essa produrrà la dilatazione A'B'C' del triangolo in modo tale che A'B' = c AB, A'C' = c AC e B'C' = c BC.

Possiamo quindi affermare che le omotetie sono delle *funzioni lineari* tra i lati di un triangolo assegnato e i corrispondenti del triangolo trasformato tramite omotetia.

Consideriamo ora la seguente figura:



Supponiamo di essere in una valle pianeggiante ad altitudine nota e fissa in prossimità del Gran Sasso (ad esempio in due punti allineati della bassa Valle del Vomano nei pressi del livello del mare) ed individuiamo due punti K' e B' di cui sia nota la distanza. Con un sestante si misurino gli angoli α e β; il triangolo K'B'C' non è rettangolo, ma è possibile costruirne uno rettangolo A'B'C' con la stessa altezza del precedente. A'C' è la grandezza incognita.

Ora, con questi dati è possibile disegnare a casa una figura, come quella in alto a sinistra, contenente i triangoli KBC simile a K'B'C' e ABC simile ad A'B'C' (avendo cura quindi di riportare gli stessi angoli α e β). Si può mostrare che ABC si ottiene da A'B'C' tramite omotetia di fattore *c*. Lo stesso vale per K'B'C' e KBC. Il rapporto tra K'B' e KB è dunque pari a *c*. Conoscendo K'B' e misurando KB, si può individuare *c*. Quindi, misurando AC, si può calcolare l'altitudine del Gran Sasso: essa è pari ad A'C' = *c* AC.

Conclusione

I modelli lineari hanno un gran numero di applicazioni nei vari rami della Matematica, di cui abbiamo esaminato solo una piccola parte. Nel corso dei restanti anni di liceo vedremo altri casi in cui essi sono riscontrati.