RELAZIONE FINALE

LABORATORIO DI DIDATTICA DELLA MATEMATICA
Prof. Brandi

Classe di concorso A049
TFA A.A. 2011 - 2012
Università di Perugia

Cardinali Chiara

Perugia - Maggio 2013

1 La retta come modello

L'unità didattica si propone di fare una breve trattazione sulla retta, proposta nell'ottica non della geometria euclidea, ma di quella analitica.
Ci si rivolge a una classe terza di un Istituto Professionale Statale. Gli studenti degli Istituti Professionali e Tecnici hanno, in generale, una scarsa attitudine allo studio teorico di qualunque tipo di argomento. La loro impostazione è quasi totalmente rivolta alla pratica, considerato anche il fatto che le materie cardine del percorso di studi sono proprio quelle che riguardano le attività di laboratorio.
Nella mia personale esperienza di insegnamento, ho trovato sempre colleghi pronti al dialogo e allo scambio di opinioni reciproco. Spesso mi è capitato di poter prendere spunto da argomenti trattati in altre materie. Proprio per questo, ho scelto di privilegiare lo studio di modelli matematici della realtà.
Al termine dello studio, gli alunni dovranno conoscere i concetti principali, aver sviluppato delle capacità e aver aquisito anche delle nuove competenze che gli permettano di poter applicare correttamente queste nuove conoscenze. Ho scelto, perciò, di classificare gli obiettivi fondamentali da raggiungere dividendoli tra conoscenze, abilità e competenze.

1. Conoscenze:
    - conoscere il concetto di retta;
    - conoscere il significato geometrico del coefficiente angolare e del termine noto.
2. Abilità:
    - saper riconoscere l'equazione di una retta;
    - saper riconoscere il coefficiente angolare e l'intercetta;
    - saper disegnare nel piano cartesiano una retta.
3. Competenze:
    - saper rappresentare graficamente due grandezze direttamente proporzionali;
    - saper risolvere semplici problemi di scelta.

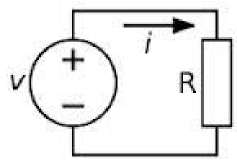
2 Prerequisiti

Per poter affrontare lo studio dei prossimi argomenti, sono necessari alcuni prerequisiti di base.
Innanzitutto si deve conoscere il piano cartesiano. Note le coordinate di un punto, si deve essere in grado di sistemarlo all'interno del piano. Viceversa, dato un punto nel piano, se ne devono saper ricavare l'ascissa e l'ordinata.
Bisogna saper lavorare con i numeri, sia interi che razionali. L'unico numero irrazionale che ci servirà sarà π.
Si deve riuscire a riconoscere se due triangoli sono simili usando i criteri di similitudine.
Per quanto riguarda il calcolo algebrico, si deve essere in grado di saper risolvere un'equazione di primo grado in una incognita intera, anche con coefficienti razionali. Si dev'essere in grado di poter risolvere un sistema lineare in due incognite.
Infine, per poter capire l'ultimo esempio di approfondimento, si deve conoscere la definizione di velocità come spazio percorso su tempo impiegato.

3 La proporzionalità diretta

Due grandezze x e y sono direttamente proporzionali se esiste una costante numerica non nulla k, chiamata costante di proporzionalità, tale che $y = kx$.
Per segnalare che y e x sono direttamente proporzionali, si usano scritture come: $y \sim x$ oppure $y \propto x$.
Questo significa che al variare della grandezza x, la y varierà di conseguenza, in maniera tale che il loro rapporto sia sempre uguale a k.
Molte grandezze sono tra loro proporzionali. Nei prossimi esempi ne analizzeremo in particolare due coppie.

Esempio 1. In qualunque Istituto professionale vengono studiati, in modo più o meno approfondito, vari tipi di circuiti elettrici. A seconda di quanto vale la resistenza, se cambia l'intensità i della corrente elettrica che fluisce all'interno del circuito cambierà di conseguenza anche il potenziale V ai capi del generatore. Analizziamo il circuito seguente, la cui resistenza interna totale è 3Ω.



Creiamo una tabella in cui inserire i valori della corrente, misurati in ampere, e i corrispondenti valori della tensione, misurati in volt.

i	0	1	2	3	4
V	0	3	6	9	12

Quelli della tabella possono sembrare tanti numeri scollegati tra di loro. Osservandoli con attenzione, si scopre che non è così.
Innanzitutto, notiamo che il rapporto tra un valore della tensione e il rispettivo valore della corrente è sempre lo stesso e vale proprio 3 come la resistenza interna del circuito.
Inoltre, si nota che se la corrente raddoppia, ad esempio da $2A$ diventa $4A$, allora anche la tensione raddoppia, poiché passa da $6A$ a $12A$. Quindi se la corrente varia, la tensione varia di conseguenza e dello stesso fattore.
Possiamo dire di più su queste variazioni. Proviamo a calcolare le differenze tra alcune coppie di valori successivi di corrente e tensione:

$$\frac{6-3}{2-1} = \frac{9-6}{3-2} = \frac{12-9}{4-3} = 3$$

Troveremo sempre il numero 3, qualunque coppia ordinata di valori corrispondenti possiamo scegliere. Quindi questi rapporti corrispondono a una costante, che comunemente si chiama tasso di variazione.
Tutto questo è in accordo con la prima legge di Ohm: $V = iR$. In questo caso $V = 3R$, cioè ad ogni valore della corrente corrisponderà un valore della tensione che è esattamente il triplo.

Esempio 2. Il tornio parallelo è una delle macchine utensili più usate nell'industria meccanica, soprattutto perché permette di eseguire una grandissima varietà di lavori su pezzi di metallo. Di solito è presente in tutti i laboratori degli Istituti Professionali che hanno classi a indirizzo meccanico.
L'utensile è fissato al bancone di lavoro, poiché è montato solidamente su una torretta, mentre il pezzo in lavorazione viene messo in rotazione. E' un motore elettrico che trasmette il moto di rotazione ad un mandrino che sostiene il pezzo da lavorare. Alla destra di questo, è fissato un rigido bancale con due guide parallele sulle quali scorrono la torretta portautensile e un sostegno da contropunta.

La velocità di taglio è la velocità relativa con la quale l'utensile affronta il materiale da asportare e di solito si esprime in metri al minuto. E' importante scegliere la giusta velocità di taglio v_T in base alla durezza del materiale da lavorare. Materiali duri è meglio se si tagliano con basse velocità, materiali dolci con alte velocità. Ci sono delle tabelle che suggeriscono quali sono i valori ottimali. Una volta scelta v_T, se l'utensile ha diametro pari a $20mm$, il mandrino avrà una velocità di rotazione di n giri al minuto.
La seguente tabella contiene i valori delle velocità medie di taglio consigliate per la sgrossatura di vari materiali e il corrispondente numero di giri al minuto compiuti dal mandrino.

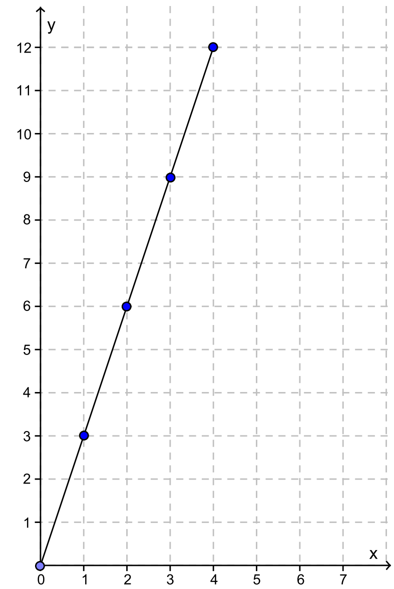
MATERIALE	v_T	n
acciaio extra dolce	60	954
acciaio duro	35	557
acciaio extra duro	30	477
acciaio bonificato	20	318
ghisa dolce	40	636
ghisa dura	20	318
rame	45	716
ottone	100	1591
alluminio	200	3183

I valori nella tabella non si accoppiano a caso, poiché il numero di giri è strettamente legato alla velocità di taglio. Ad esempio, se si aumenta la velocità da 100 a 200 metri al minuto, aumenta anche il numero di giri al minuto da 1591 a 3183. Viceversa, se diminuisce la velocità, diminuisce anche il numero di giri. Al variare di una grandezza varia anche l'altra, proprio come succedeva prima per la corrente e la tensione.
Inoltre, se conosco il valore della velocità, per calcolare n basta che lo moltiplico per 50 e lo divido per π. Questo non è un caso. Come i tornitori sanno bene, se il diametro di tornitura espresso in mm è d, c'è una relazione di diretta proprorzionalità che lega v_T e n:

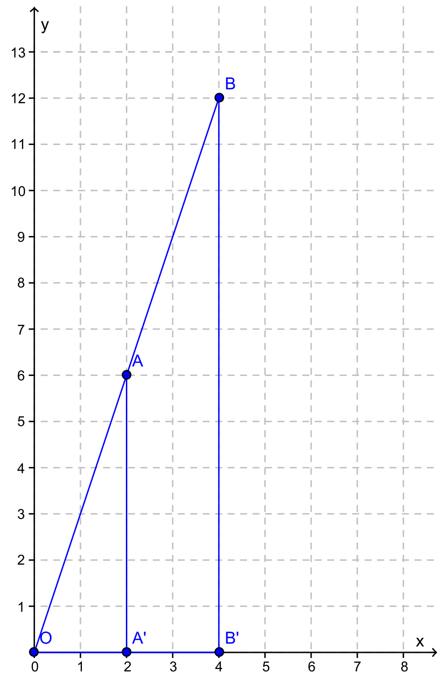
$$n = \frac{1000 \cdot v_T}{\pi d}.$$

4 Che cosa c'entra la retta?

Gli esempi precedenti contenevano delle tabelle formate da coppie di valori assunti dalle due grandezze considerate. Chiamiamo con x la prima grandezza in esame e con y la seconda. Ogni coppia di valori può essere rappresentata in un piano cartesiano con un punto di coordinate (x, y).
Rappresentiamo i valori della tabella dell'esempio (1) in un piano cartesiano di assi x e y.



Notiamo che i punti sono tutti allineati, cioè se proviamo ad unirli a coppie, scopriamo che, tutti i segmenti disegnati, insieme formano una stessa linea. Questa linea è proprio la retta che rappresenta l'andamento della grandezza x in funzione dell'andamento della grandezza y.
Una relazione di proporzionalità diretta tra x e y, del tipo $y = kx$, rappresenta proprio una retta del piano cartesiano che passa per l'origine.
Il tasso di variazione k che cosa rappresenta?
Proviamo a disegnare nel grafico i triangoli di vertici $O = (0, 0)$, $A' = (2, 0)$, $A = (2, 6)$ e $O = (0, 0)$, $B' = (4, 0)$, $B = (4, 12)$.



Questi due triangoli sono rettangoli. L'angolo $\hat{O}$ è in comune. Gli angoli $O\hat{A}A'$ e $O\hat{B}B'$ sono formati da due rette verticali, quindi parallele, tagliate dalla nostra retta, perciò sono congruenti. In conclusione, i due triangoli, avendo tutti gli angoli congruenti, sono simili.
Mettiamo in proporzione le misure dei loro cateti:

$$\frac{\overline{AA'}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{B'O}} = 3.$$

Poiché i segmenti in questione rappresentano proprio le ascisse e le ordinate dei punti A e B, possiamo riscrivere così:

$$\frac{y_A}{x_A} = \frac{y_B}{x_B} = 3.$$

Cioè il rapporto tra l'ordinata e l'ascissa dei punti A e B della retta è sempre uguale a 3. Posso scegliere arbitrariamente una qualunque coppia di punti della retta e otterrò sempre lo stesso risultato. In conclusione, il legame che caratterizza le coordinate (x, y) dei punti appartenenti alla nostra retta è $\frac{y}{x} = 3$. Si dice che l'equazione della retta è $y = 3x$. Una qualsiasi equazione del tipo $y = mx$, con $m \in \mathbb{R}$, rappresenta una retta passante per l'origine. Il numero m si chiama coefficiente angolare e rappresenta la pendenza della retta, cioè la sua inclinazione rispetto all'asse delle x.

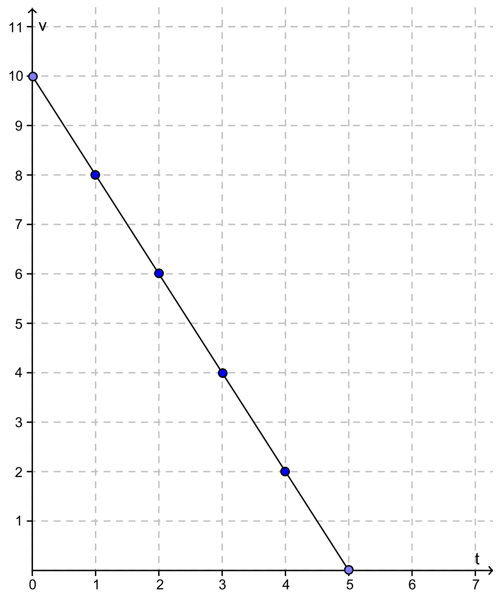
Se $m > 0$, la retta forma un angolo acuto con l'asse delle x e percorrendola da sinistra verso destra si sale: il grafico della retta è crescente.
Se $m < 0$, la retta forma un angolo ottuso con l'asse delle x e percorrendola da sinistra verso destra si scende: il grafico della retta è decrescente.
Se $m = 0$, la retta è orizzontale, ha equazione $y = 0$ e rappresenta proprio l'asse delle x.

5 Rette in posizione generica

Esistono coppie di grandezze che non sono direttamente proporzionali, ma la loro relazione si rappresenta comunque come una retta. Facciamo un esempio.
Supponiamo di avere un corpo che si muove con velocità $10\frac{m}{s}$. Rallentiamolo, decelerandolo di $2\frac{m}{s^2}$. Creiamo una tabella che indichi qual'è la velocità v del corpo all'istante t.

t	0	1	2	3	4	5
v	10	8	6	4	2	0

La velocità diminuisce sempre di più, finché il corpo non si ferma. Rappresentiamo in un piano cartesiano di assi v e t i valori della tabella.



Quella che otteniamo è una retta che non passa per l'origine ed è decrescente.
Questa volta non siamo in presenza di una diretta proporzionalità.

In effetti, il rapporto tra un valore di t e il corrispondente valore di v non è sempre costante. Proviamo a capire se esiste comunque una relazione matematica che lega le due grandezze.
Chiamiamo $m = -2$ e v_i la velocità del corpo all'istante i. All'inizio, cioè nell'istante 0, sappiamo che $v_0 = 10$. Calcoliamo le successive velocità.

$$v_1 = 8 = 10 - 2 = v_0 + m,$$

$$v_2 = 6 = 8 - 2 = v_1 + m = (v_0 + m) + m = v_0 + 2m,$$

$$v_3 = 4 = 6 - 2 = v_2 + m = (v_0 + 2m) + m = v_0 + 3m.$$

Chiaramente, questo ragionamento lo possiamo ripetere per ogni istante. In generale $v_t = v_0 + mt$, cioè esiste una relazione lineare tra la velocità v ed il tempo t.
Un'equazione del tipo $y = mx + q$ definisce una retta nel piano cartesiano. Se $q = 0$ è una delle rette passanti per l'origine che abbiamo studiato nel paragrafo precedente. Se $q \neq 0$ è una retta che non passa per l'origine. Il numero m è, come abbiamo già detto, il coefficiente angolare e rappresenta la pendenza della retta.
Il numero q invece che cos'è?
Nell'esempio precedente, q era la velocità iniziale del corpo, cioè quella che il corpo ha all'istante 0. In generale, q è il valore assunto dalla grandezza y quando la x vale zero. Si chiama intercetta o anche ordinata all'origine, perché il grafico della retta incontra l'asse delle y proprio nel punto $(0, q)$.
Attenzione però! C'è un ultimo tipo particolare di rette che non può essere descritto da nessuna delle equazioni viste: quelle verticali. In effetti, che coefficiente angolare potrei dare a una retta verticale? L'angolo che forma con l'asse delle x non è né acuto, né ottuso, ma è retto! Come faccio a percorrerla da sinistra a destra o da destra verso sinistra?
Cerchiamo allora di capire quale equazione descrive la più diffusa retta verticale: l'asse delle y. Proviamo ad elencare un pò dei punti che gli appartengono, sistemandone in una tabella le coordinate.

x	0	0	0	0	0	0
y	-2	-1	0	1	2	3

Qual'è la caratteristica che accomuna tutti questi punti? Avere l'ascissa sempre nulla. L'equazione che descrive l'asse delle y sarà quindi $x = 0$.
In conclusione, l'equazione che descrive una qualunque retta verticale è $x = k$, per qualche $k \in \mathbb{R}$. Analogamente una qualunque retta orizzontale è descritta dall'equazione $y = l$, per qualche $l \in \mathbb{R}$.

6 Problemi di scelta

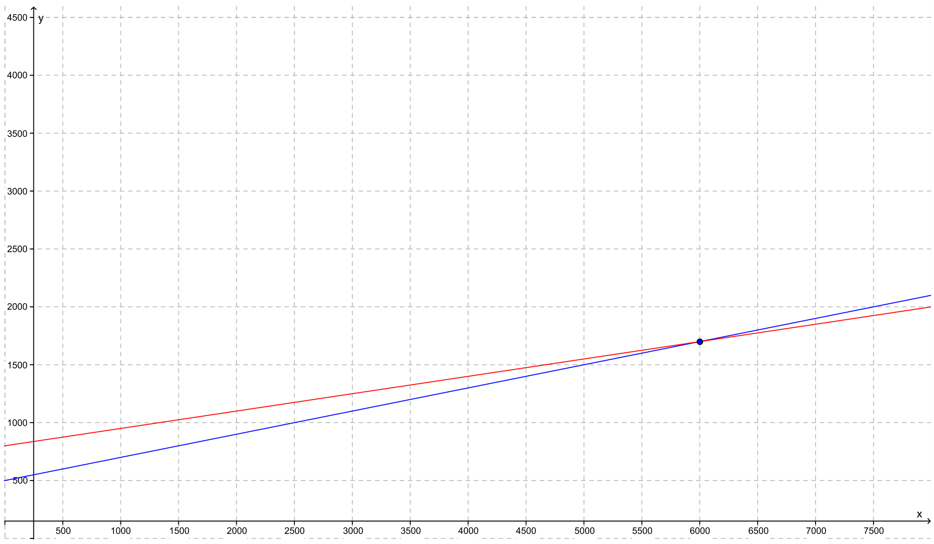
Per risolvere molti tipi di problemi di scelta, può essere utile studiare il punto di intersezione di alcune rette nel piano cartesiano. Ma come si fa a calcolare il punto dove due rette si incontrano?
In generale, date due rette di equazione $y = m_1x + q_1$ e $y = m_2x + q_2$, il loro punto di intersezione è quello le cui coordinate soddisfano il sistema

$$\begin{cases} y = m_1x + q_1 \\ y = m_2x + q_2 \end{cases}$$

Facciamo degli esempi.

Problema 1. Al commesso di un negozio vengono proposte due diverse forme di retribuzione. La prima consiste in 500€ al mese, più il 20% degli incassi. La seconda consiste in 800€ al mese, più il 15% degli incassi.
Qual'è la forma di retribuzione più conveniente in relazione all'incasso mensile?

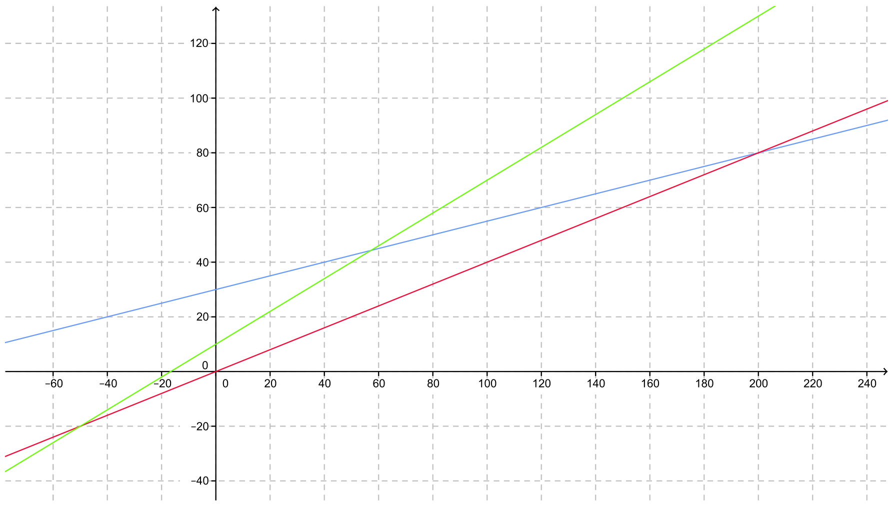
Possiamo rappresentare le due proposte attraverso due rette: $y = 500 + \frac{1}{5}x$, di colore blu, e $y = 800 + \frac{3}{20}x$, di colore rosso.



Sono entrambe rette crescenti e, risolvendo il sistema corrispondente, si può calcolare che si incontrano nel punto $(6000, 1700)$. Per le $x \in (0, 6000)$, la retta blu è più bassa dell'altra. Per le $x > 6000$ è più bassa la rossa.
Quindi, finché l'incasso mensile non supera i 6000€, è più conveniente la seconda proposta, altrimenti è più conveniente la seconda. Se l'incasso è proprio di 6000€, entrambe le proposte danno la stessa quota di retribuzione.

Problema 2. Sono in vacanza in Sardegna e voglio noleggiare un'auto per andare a visitare la città di Orosei, che si trova a 75Km di distanza dal mio albergo. Mi vengono proposte tre tariffe diverse.
La prima ha una quota fissa di 30€ e mi costa 0,25€ per ogni Km percorso. La seconda invece mi costa 0,40€ per ogni Km percorso e non ha quote fisse. La terza mi costa 10€ di quota fissa e 0,60€ per ogni Km percorso.
Qual'è la più conveniente?

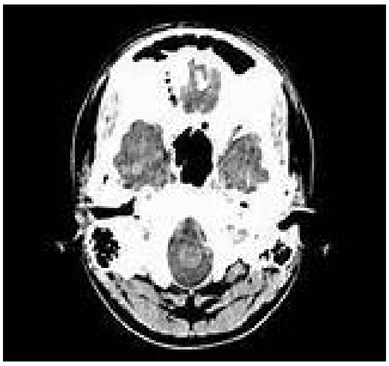
Anche in questo caso, è utile modellizzare il problema usando la retta. Nello stesso piano cartesiano, disegnamo la retta $y = 30 + 0,25x$ di azzurro, la retta $y = 0,4x$ di rosso e la retta $y = 10 + 0,6x$ di verde.



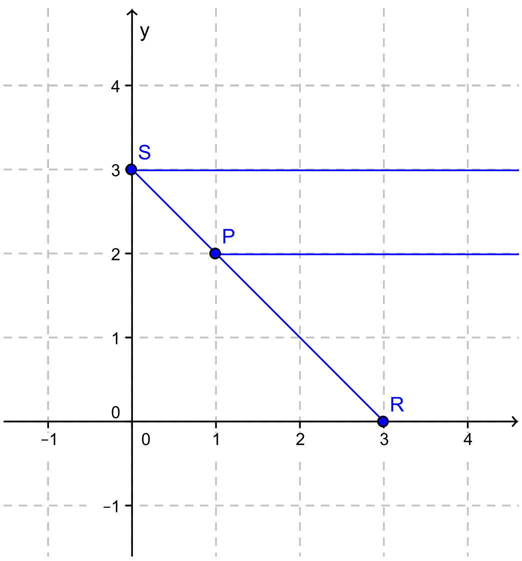
La retta verde, per $x > 75$, è più alta delle altre due. Quindi, dovendo percorrere più di 75Km, la terza tariffa è senza dubbio la più conveniente.

7 Proposta di approfondimento: la TAC

La TAC (Tomografia Assiale Computerizzata), è una metodologia diagnostica che, sfruttando i raggi X, ricostruisce al computer l'immagine di un organo. Le strutture assorbono i raggi X in modo diverso. Quelle più dense, come ad esempio le ossa, assorbono la radiazione più facilmente di quelle meno dense, come la pelle. La radiazione che non viene assorbita, si raccoglie su una lastra. L'immagine che si ottiene è un'ombra dell'organo, o del tessuto, da fotografare. La figura seguente mostra la TAC di un cervello.



Nella radiografia classica, il paziente è fermo rispetto alla sorgente di radiazioni. Nella TAC, invece, il paziente e la sorgente sono in movimento relativo uno rispetto all'altro.
Proviamo a modellizzarne il funzionamento attraverso il piano cartesiano. Rappresentiamo la sorgente di radiazioni con un punto S che inizialmente si trova in $(0, 3)$ e che poi si può muovere lungo la retta orizzontale $y = 3$ con velocità v_1. L'oggetto da fotografare sarà rappresentato dal punto P che all'inizio si trova in $(1, 2)$ e poi si può muovere sulla retta $y = 2$ con velocità v_2. In ogni istante, la radiazione emessa da S proietta l'immagine di P in un punto R su una lastra sensibile ai raggi X: l'asse delle x. All'inizio, l'ombra di P è il punto $(3, 0)$.



Perché l'immagine sia nitida e ben definita, il punto R non si deve spostare anche se S e P si muovono. Quanto devono valere le due velocità, di S e di P, perchè il punto R resti sempre lo stesso?
All'istante t, S e P avranno assunto coordinate $S = (v_1 t, 3)$ e $P = (1+v_2 t, 2)$. Calcoliamo la retta passante per questi due punti e l'ascissa del suo punto di intersezione con l'asse delle x: $3 + t(3v_2 - 2v_1)$. Perché questo valore resti sempre 3, dev'essere $3v_2 = 2v_1$. Ad esempio, se S si muove con velocità $3\frac{m}{s}$, allora P si deve muovere con velocità $2\frac{m}{s}$.