

# UNITA' DI APPRENDIMENTO

## *La proporzionalità diretta con la metodologia del Cooperative Learning*

di Agnese Serangeli

TFA classe A059

### Introduzione

L'unità di apprendimento proposta si inserisce all'interno di una attività di "Laboratorio di Matematica" in una classe terza di Scuola Secondaria di I grado, volta a sottolineare l'importanza della matematica nel quotidiano; partendo, infatti, da alcune situazioni del mondo reale si acquisisce, in questa specifica unità, la consapevolezza del concetto di proporzionalità diretta e delle percentuali anche in vista della prova Invalsi prevista al termine del ciclo di studi.

Apprendimenti inseriti in un contesto reale, con un compito reale da eseguire, possono aiutare l'apprendimento (e l'insegnamento) della matematica, dimostrando che non è una scienza astratta e di scarsa utilità per la vita di tutti i giorni. Nella società di oggi si riconosce alla matematica un ruolo centrale nel processo formativo di ogni studente, indipendentemente dal percorso di studi scelto. La matematica fornisce, infatti, alcuni degli strumenti per affrontare e risolvere problemi e compiti del quotidiano e quindi per comprendere il mondo circostante e divenire cittadini consapevoli.

La metodologia scelta per tale unità di apprendimento è quella del Cooperative Learning.

Il *Cooperative Learning* non è un "lavoro di gruppo" ma un "gruppo di lavoro" eterogeneo e democratico all'interno del quale si deve creare un contesto educativo non competitivo, altamente responsabile e collaborativo, che dia a ciascuno le stesse possibilità di successo.

È un sistema che permette di apprendere sia contenuti disciplinari che comportamenti sociali di collaborazione e di cooperazione attraverso lo sviluppo delle abilità comunicative, il superamento dei conflitti, l'affermazione di ciascuno in campo decisionale, organizzativo, risolutivo.

Con il Cooperative Learning migliorano le capacità relazionali, si rafforza l'identità, l'autostima e la sicurezza degli studenti, si migliora il rendimento scolastico in termini di quantità e qualità delle competenze.

Il Cooperative Learning si rivela ideale per l'apprendimento e l'insegnamento nell'ambito di una scuola orientata a formare cittadini con le caratteristiche che più interessano il mondo del lavoro: una preparazione in senso largo, la capacità di lavorare in team, l'abilità di problem solving.

L'insegnante non ha la funzione di esperto, ma di consulente, mediatore, facilitatore dell'apprendimento.

I principi che caratterizzano un gruppo cooperativo:

- **Il raggruppamento eterogeneo:** in termini di provenienza sociale, di livello di competenze, di sesso. Per garantire l'eterogeneità, è necessario formare gruppi di almeno tre /cinque studenti.

- **L'interdipendenza positiva:** Si ha quando un componente percepisce che è vincolato agli altri così da non poter aver successo senza di loro e deve coordinare i propri sforzi con quelli altrui per completare un compito.
- **L'acquisizione di competenze sociali:** ovvero l'attenzione formativa dedicata allo sviluppo dei comportamenti e degli atteggiamenti che ogni componente deve assicurare al gruppo cooperativo.
- **L'autonomia del gruppo:** Gli studenti imparano a risolvere problemi che incontrano per conto proprio, anziché chiedere aiuto all'insegnante, attivando un brainstorming di gruppo che permetta una reazione a catena delle idee.
- **La revisione ed il controllo:** ovvero la verifica del processo formativo e produttivo, dei punti deboli e dei punti forti che hanno caratterizzato le modalità di interazione tra i componenti del gruppo e di ogni singolo componente del gruppo e del risultato effettivamente raggiunto rispetto agli obiettivi.

### **Obiettivi specifici:**

#### ***Conoscenze***

- Corrispondenza biunivoca tra classi di grandezze omogenee;
- Proporzionalità diretta tra classi;
- Acquisire consapevolezza su proporzioni e percentuali;
- Rappresentazione di grandezze direttamente proporzionali.

#### ***Abilità***

- Ricerca del quarto proporzionale;
- Problemi del tre semplice in sequenza;

#### ***Competenze e atteggiamenti***

- In situazioni problematiche individuare relazioni di proporzionalità diretta tra grandezze e rappresentarle per via grafica e algebrica;
- Risolvere problemi e modellizzare situazioni in diversi campi di esperienza della vita quotidiana;
- Utilizzare modelli assegnati o costruire semplici modelli per descrivere fenomeni ed effettuare previsioni;
- Far acquisire un corretto metodo di studio inteso come consapevole accrescimento delle conoscenze, anche autonomamente ricercate e formalizzate;
- Sviluppare e potenziare le capacità di analisi, sintesi, applicazione e comunicazione in vista di un sapere ampio, personalmente rielaborato ed utilizzabile in diversi contesti;
- Promuovere situazioni di autocoscienza, autovalutazione ed esercizio critico;
- Stabilire e saper rispettar le regole nei rapporti interpersonali;
- Sapere utilizzare le competenze già acquisite in ambiti diversi per costruire nuove conoscenze, abilità e competenze.

## **Prerequisiti**

- Frazioni;
- Proprietà invariantiva delle frazioni;
- Rapporti tra grandezze omogenee;
- Nozioni di calcolo letterale;
- Proporzioni e percentuali;
- Diverse rappresentazioni di una corrispondenza (tabella, istogrammi).

## **Articolazione dell'attività didattica**

Nella prima lezione, l'insegnante, dopo aver esposto il tipo di attività e in che cosa consista la metodologia del "Cooperative Learning" inizia con la

**1. Formazione dei gruppi:** I gruppi devono risultare il più possibile eterogenei sia in termini di provenienza sociale, di livello di competenze, di sesso. I gruppi devono essere costituiti possibilmente da tre o meglio cinque studenti, ciò sia per garantire la suddetta eterogeneità che per far sì che, se si dovessero verificare discussioni circa un certo argomento, sarebbe la maggioranza (3 su 2) a decidere. La scelta dei componenti del gruppo sarà a discrezione dell'insegnante.

**2. Selezione del materiale:** Il materiale che verrà fornito ai diversi gruppi di lavoro. Esso si articola in:

- *Scheda 1:* Consegna materiale e definizione dei ruoli all'interno di ciascun gruppo.
- *Scheda 2:* "Offerte natalizie"
- *Scheda 3:* Approfondimento su "Offerte natalizie"
- *Scheda 4:* Altri due quesiti su proporzioni e percentuali
- *Scheda 5:* Autovalutazione dell'attività di gruppo.

## **3. Organizzazione di tempi e spazi e delle fasi didattiche.**

L'unità di apprendimento si svolge in quattro lezioni, la prima di un'ora e le altre tre di due ore da svolgere in classe avendo a disposizione la LIM.

La prima lezione introduttiva ha lo scopo di riprendere, da parte dell'insegnante, il concetto di proporzionalità diretta, trattato ampiamente l'anno scolastico precedente. Inoltre, l'insegnante divide la classe in gruppi da tre o cinque, a seconda della numerosità del gruppo classe in modo da formare almeno 5-6 sottogruppi a cui spiega in cosa consiste il Cooperative Learning e provvede, infine, alla definizione dei comportamenti e delle competenze sociali per ogni gruppo e la definizione dei ruoli (chi verbalizza, chi coordina, chi controlla i tempi).

Invece, ciascuna lezione di due ore si articola come segue: dopo la consegna dei compiti, si procede con il **lavoro di gruppo** in cui ciascun gruppo, appunto, avendo a disposizione un'ora di tempo, dovrà attuare, sulla base delle schede consegnate (vedi selezione materiale) una discussione comune sulle soluzioni trovate, un'elaborazione della soluzione in gruppo, una verifica che tutti abbiano compreso le motivazioni della soluzione, una preparazione del report finale. Infine ci sarà la fase di **intergruppo** della durata di un'ora, in cui ogni gruppo presenta il proprio lavoro, raccoglie le varie soluzioni e svolge un'azione di feed-back su quanto svolto.

### Scelte metodologiche e didattiche con relativa traccia di sviluppo:

Le scelte metodologiche e didattiche si dirigono verso:

- Una rivalutazione in chiave positiva della matematica offrendone una visione creativa, interessante, utile e vicina alla realtà non caratterizzata da ansia, paura o pregiudizi;
- Stabilire un clima relazionale e comunicativo sereno, ricco, in un contesto favorevole alla promozione delle capacità relazionali e sociali;
- Creare situazioni problematiche che stimolino la partecipazione attiva e propositiva.

### Traccia di sviluppo:

*Presentazione del lavoro alla classe:*

Come già evidenziato precedentemente, tale unità di apprendimento si inserisce all'interno di un progetto di "Laboratorio di Matematica". Si sceglie di affrontare il tema della proporzionalità, argomento trattato in seconda media per far acquisire agli studenti una maggiore consapevolezza dell'argomento viste le numerose applicazioni nel mondo reale.

Nella **prima lezione**, di carattere introduttivo, l'insegnante riprende il concetto di grandezze direttamente proporzionali; in particolare:

*Assegnate due classi di grandezze A e B in corrispondenza biunivoca, si dice che A e B sono costituite da grandezze direttamente proporzionali se il rapporto di due elementi comunque scelti in A è pari al rapporto dei corrispondenti elementi in B.*

Grandezze direttamente proporzionali	
Elementi in classe A	Elementi in classe B
$a_1$	$b_1$
$a_2$	$b_2$
....	....
$a_n$	$b_n$

*Formalmente si scrive:*

$$a_1:a_2 = b_1:b_2 \quad a_2:a_3 = b_2:b_3 \quad .... \quad a_{n-1}:a_n = b_{n-1}:b_n$$

*Applicando la proprietà del permutare, nota agli studenti, invertendo l'ordine dei medi, si ottiene:*

$$a_1:b_1 = a_2:b_2 \quad a_2:b_2 = a_3:b_3 \quad .... \quad a_{n-1}:b_{n-1} = a_n:b_n$$

*Così l'uguaglianza dei rapporti fra grandezze omogenee (rapporti in colonna) equivale all'uguaglianza dei rapporti tra grandezze corrispondenti (rapporti di riga).*

Dopo questa breve introduzione si propongono alcuni esercizi semplici unicamente per riprendere il discorso trattato ampiamente l'anno precedente per sottolineare l'importanza della costruzione della tabella, come i seguenti:

- 1) Per preparare una torta per 8 persone, la ricetta indica, oltre agli altri ingredienti, 300 g di farina. Quanta farina occorre per confezionare lo stesso tipo di torta per 12 persone? (450 g di farina)
- 2) Per 5 giorni di lavoro un operaio riceve un compenso di 360 euro. Quale compenso riceverà per un lavoro che dura 13 giorni? (936 euro)
- 3) Se durante un telefilm della durata di 50'' scorrono in sovrimpressione 5 spot pubblicitari, quanti ne scorreranno in uno che dura 1 ora e 20''? (8)

Nella **seconda lezione** da svolgere, come già detto, con la modalità del Cooperative Learning, il materiale fornito a ciascun gruppo è il seguente (scheda 1 e scheda 2):

## **SCHEDA 1**

**Titolo:** Offerte Natalizie

**Tempo:** 1 ora

**Consegne:**

- 1) Dividetevi i ruoli di:
  - coordinatore: .....
  - segretario:.....
  - controllore del tempo:.....
- 2) Stabilire delle regole comportamentali per far intervenire tutti
- 3) Consultare il **materiale e le schede di lavoro** consegnate
- 4) Risolvete il quesito, esprimete le vostre considerazioni e preparate un documento unitario finale

## SCHEDA 2

### Offerte Natalizie

Un venditore di scarpe prima di Natale aumenta i prezzi del 20%. Finite le feste vende tutta la merce con uno sconto del 20%.

Un paio di scarpe dal costo iniziale di 80 €, a gennaio vengono vendute a 80 €? E se no, a quanto?

Vero ☐

Falso ☐

Giustificare la risposta.

[Fonte: Gara città di Terni, 2004]

### Indicazioni che, se volete, potete seguire:

- Le informazioni a disposizione dal testo si possono riassumere nella tabella, inserendo i numeri mancanti nelle caselle colorate:

prima di Natale aumenta i prezzi del 20 %   dopo Natale vende con uno sconto del 20%.	Prezzi in euro		
	Iniziale	Prima di Natale	Gennaio
			???
	100		
		100	

- Evidenziare nella tabella precedente con due rettangoli in rosso le 4 caselle di ogni proporzione per la ricerca del quarto proporzionale, una volta inseriti i dati opportuni.
- Impostare le due proporzioni per la ricerca del quarto proporzionale
- Risolvere le proporzioni che permetteranno di inserire il valore corretto nelle due caselle in verde:

Prezzi in euro		
Iniziale	Prima di Natale	Gennaio

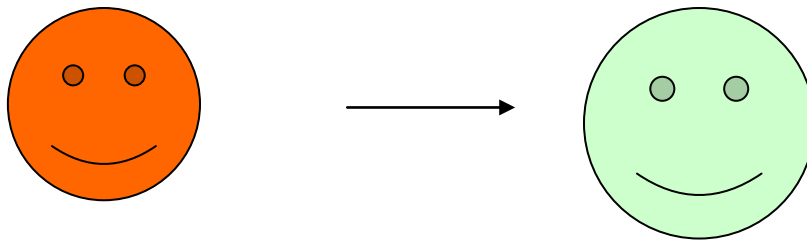
- Provare quindi a rispondere alla domanda iniziale.
- Presentare i risultati ottenuti in gruppo al resto della classe.

**FASE DI INTERGRUPPO:**  
(Traccia per l'insegnante)

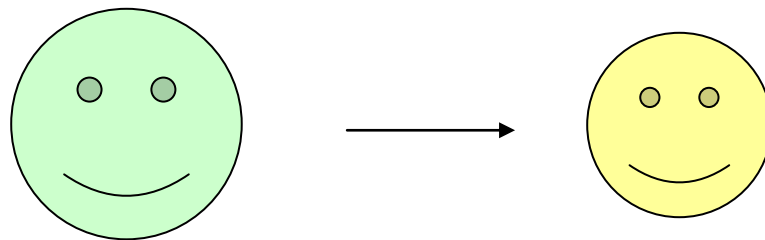
Durante la fase di intergruppo l'insegnante ha cura che

- Il percorso scelto da ciascun gruppo sia corretto indipendentemente dal fatto che abbiano seguito le indicazioni;
- La soluzione sia 76,80 euro o comunque meno di 80 euro;
- Con la LIM, o se non presente in aula, recandosi all'aula di informatica, l'insegnante utilizzando un software che permetta di zoomare (ad esempio "Microsoft Office Word") mostra che

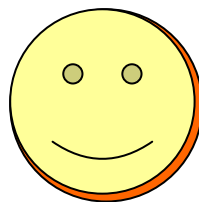
Utilizzando una metafora per immagini, possiamo illustrare l'aumento dei prezzi delle scarpe a Natale come uno *zoom-out* di 1,2:



I prezzi, invece, dopo Natale subiscono uno *zoom-in* dello 0,8:



Confrontando le due immagini si osserva che il prezzo a gennaio è inferiore rispetto a quello iniziale.



Risulta infatti che

$$x \longrightarrow 1,2 x \longrightarrow 0,8 (1,2 x) = 0,96 x$$

cioè il prezzo a gennaio è il 96% del prezzo iniziale, corrispondente a 76,80 euro.

Nella **terza lezione**, si affrontano sempre con la modalità del Cooperative Learning alcuni approfondimenti sull'esercizio proposto la lezione precedente (scheda 3).

### SCHEDA 3

Riprendiamo il testo dell'esercizio proposto la scorsa lezione:

#### Offerte Natalizie

*Un venditore di scarpe prima di Natale aumenta i prezzi del 20%. Finite le feste vende tutta la merce con uno sconto del 20%.*

*Un paio di scarpe dal costo iniziale di 80 €, a gennaio vengono vendute a 80 €?*

Abbiamo visto che, anche con la sovrapposizione delle “faccine”, se l'aumento e il successivo sconto è del 20%, il prezzo a gennaio è inferiore rispetto a quello iniziale;

#### SI CHIEDE

- 1) E se anziché il 20%, l'aumento e il successivo sconto fosse di un'altra cifra, la situazione cambierebbe? Giustifica la risposta.
- 2) Lasciando fisso l'aumento prima di Natale del 20%, di quanto dovrei modificare lo sconto dopo Natale affinché le scarpe a gennaio mantengano lo stesso prezzo iniziale?

#### Indicazioni che, se volete, potete seguire:

##### Punto 1)

- Provare a svolgere lo stesso esercizio modificando la percentuale (ad esempio 30%, 40%, ...), che cosa succede?
- Indipendentemente dal prezzo iniziale, se l'aumento e il successivo sconto lo indichiamo con la lettera k, il prezzo a gennaio sarebbe comunque inferiore?

##### Punto 2)

- Provare ad indicare soltanto lo sconto con la lettera s considerando l'aumento del 20%, come nell'esercizio della scorsa lezione e provare a compilare la tabella nelle caselle colorate.

Prezzi in euro		
Iniziale	Prima di Natale	Gennaio
100		100

Il rettangolo in rosso serve per capire la proporzione da impostare.

**FASE DI INTERGRUPPO:**  
(Traccia per l'insegnante)

Durante la fase di intergruppo l'insegnante ha cura che le risposte date siano correttamente giustificate e se necessario propone la seguente soluzione:

**Punto 1)**

Indicando l'aumento e il successivo sconto con la lettera k e inserendo i dati nella tabella si ha

Prezzi in euro		
Iniziale	Prima di Natale	Gennaio
100	$100 + k$	???
	100	$100 - k$

Impostando la proporzione

$$(100 + k) : 100 = x : (100 - k)$$

e risolvendola si ottiene:

$$x = \frac{(100 + k) \cdot (100 - k)}{100} = \frac{10000 - k^2}{100} = 100 - \frac{k^2}{100}$$

Quindi si osserva che il prezzo a gennaio è sempre inferiore rispetto a quello iniziale di  $\frac{k^2}{100}$ . Si può anche fare la prova vedendo i risultati ottenuti dai vari gruppi modificando il valore della percentuale.

**Punto 2)**

Indicando lo sconto con la lettera s e inserendo i dati nella tabella si ha

Prezzi in euro		
Iniziale	Prima di Natale	Gennaio
100	120	100
	100	$100 - s$

Impostando la proporzione

$$(120) : 100 = 100 : (100 - s)$$

e ponendo che il prodotto dei medi deve essere uguale a quello degli estremi si ottiene:

$$120 \cdot (100 - s) = 10000; \quad 12000 - 120s = 10000; \quad 120s = 2000 \Rightarrow s = \frac{2000}{120} = \frac{50}{3} = 16,\bar{6}$$

Nella quarta lezione, si affrontano sempre con la modalità del Cooperative Learning altri due esercizi tratti dalle prove Invalsi di Terza Media di Matematica.

#### **SCHEDA 4**

Si propongono i seguenti due quesiti:

##### **L'azienda**

Una grande azienda nel 2009 aveva 100 impiegati. Nell'anno 2010 il numero degli impiegati è diminuito del 20% rispetto al 2009, mentre nel 2011 è aumentato del 20 % rispetto al 2010. Al termine dei due anni gli impiegati dell'azienda sono

- A. Diminuiti del 4 %
- B. Diminuiti del 10%
- C. Aumentati del 4%
- D. Aumentati del 10%

[Fonte: Prova Invalsi Matematica 2011/2012]

##### **L'olio più conveniente**

Giulio sa che nel negozio A e nel negozio B le bottiglie di olio della marca che preferisce hanno lo stesso prezzo. Sua moglie gli dice che oggi, su quell'olio, nel negozio A fanno l'offerta "compri 3 e paghi 2" e nel negozio B fanno lo sconto del 40%. Giulio deve comprare 3 bottiglie di olio. In quale negozio gli conviene comprarlo? Giustifica la risposta.

[Fonte: Prova Invalsi Matematica 2010/2011]

**FASE DI INTERGRUPPO:**  
(Traccia per l'insegnante)

Durante la fase di intergruppo (questa volta della durata di 45 minuti per lasciare un quarto d'ora ad ogni gruppo per l'autovalutazione) l'insegnante ha cura che le risposte date siano correttamente giustificate e se necessario propone la seguente soluzione:

**L'azienda**

Risposta corretta: A.

Evidenziare l'analogia con l'esercizio sulle "Offerte natalizie"; quindi costruire la tabella e sottolineare che

Impiegati		
2009	2010	2011
100		???
100	80	
	100	120

la diminuzione del 20% nel 2010 corrisponde a uno *zoom-in* dello 0,8, mentre l'aumento del 20% nel 2011 corrisponde a uno *zoom-out* di 1,2:

Quindi

$$x \longrightarrow 0,8 x \longrightarrow 1,2 (0,8 x) = 0,96 x$$

cioè il numero di impiegati nel 2011 è il 96% di quello del 2009, corrispondente a 96 impiegati e quindi a una diminuzione del 4%.

**L'olio più conveniente**

Risposta corretta: Negozio B.

Evidenziare che è possibile trasformare l'offerta "compri 3 e paghi 2" in termini di percentuale; in particolare essa corrisponde allo sconto di 1/3 cioè del 33%; perciò l'offerta del negozio B del 40% è migliore.

O anche che con il "3×2" pago il 66% (o circa il 66%), mentre con l'altro pago il 60%.

## SCHEDA 5

### AUTOVALUTAZIONE DELL'ATTIVITA' DI GRUPPO

GRUPPO N° ..... CLASSE .....

DATA .....

RUOLI

1) Coordinatore .....
2) Verbalizzatore .....
3) Controllore tempo .....

A. Il compito è stato spiegato dal docente in modo esauriente ☐ no ☐ parzialmente ☐ si

Perché? .....

.....

B. Tutti hanno avuto lo stesso tempo di intervento ☐ no ☐ parzialmente ☐ si

Perché?.....

C. Le decisioni finali sono state concordate e prese da tutti ☐ no ☐ parzialmente ☐ si

Perché?.....

D. Tutti hanno partecipato all'attività ☐ no ☐ parzialmente ☐ si

Perché? .....

E. Tutti hanno svolto il loro ruolo ☐ no ☐ parzialmente ☐ si

Perché?.....

F. Il compito è stato svolto in maniera esauriente ☐ no ☐ parzialmente ☐ si

Perché?.....

#### Verifica degli apprendimenti

Il momento di verifica è quello in cui ciascun gruppo, tramite il proprio rappresentante, espone, durante la fase di intergruppo nelle tre lezioni da due ore, il lavoro prodotto. L'insegnante al termine di ogni lezione dà un giudizio a ciascun gruppo e il voto viene assegnato non al singolo, ma al gruppo: se infatti si estrapola il singolo dal gruppo allora il Cooperative Learning fallisce.