

Università degli Studi di Perugia

Tirocinio Formativo Attivo

Classe A049

“Laboratorio di Didattica della Matematica”



Perugia, 11 giugno 2013

Tirocinante

Marcacci Lucia

Destinatari :

- ✓ Classe 2° Liceo Scientifico

Prerequisiti:

- ✓ Piano cartesiano
- ✓ Disequazioni lineari
- ✓ Risoluzione grafica di disequazioni lineari

Competenza:

- ✓ Analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi, anche con l'ausilio di interpretazioni grafiche, usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni di tipo informatico (n.4 Asse Matematico)

Obiettivi di apprendimento:

- ✓ Capacità di strutturare un problema secondo una organizzazione logica raggruppandone i dati in modo sequenziale chiaro e leggibile
- ✓ Acquisire familiarità con l'idea generale di ottimizzazione e con le sue applicazioni in diversi ambiti.

IL COLTIVATORE DIRETTO

Il coltivatore diretto ogni anno si trova a prendere decisioni importanti: sa infatti che l'esito dei raccolti, oltre che dalle situazioni atmosferiche che si presenteranno, dipende anche da fattori tecnici che può decidere: la rotazione dei terreni, le colture adatte al tipo di terreno, l'irrigabilità, la manodopera necessaria etc.

Scelte poi le tipologie di coltivazione cerca di ottimizzarne la resa economica; sa infatti che da questa scelta dipenderà una buona fetta del suo futuro lavorativo: i costi che sosterrà per tutte le fasi di preparazione, semina, trattamenti e raccolta, spesso sono assolutamente paragonabili ai ricavi di fine stagione.



Il caso proposto riguarda un agricoltore che ha deciso di intraprendere la coltivazione di due generi di ortaggi (lattuga e tuberi), che sono tra le colture a maggior reddito e hanno un buon assorbimento di mercato. Deve però stabilire le quantità di terreno da dedicare ad ognuno di essi.

Egli ha a disposizione 12 ettari di terreno, come utilizzarli ?





Per ogni ettaro di terreno occorre seminare circa 2t di patate da seme, per la lattuga la quantità di seme è circa 1- 3 g/m² (10 - 30 kg/ha; il costo del seme è circa 200 €/kg!).

La resa in quantità della lattuga può superare le 20 t/ha (il peso medio del cespo è di circa 0,3 kg e vengono normalmente seminate più varietà di lattuga); la resa in quantità per la patata, si aggira intorno a 30 t/ha (il tipo di tubero dipende dalla composizione chimica del terreno, dalla sua lavorabilità e dal clima).

Il nostro coltivatore ha a disposizione 165 kg di semi di lattuga, 18 t di tuberi e 160 t di stallatico necessario per la concimazione.

La resa economica (cioè il margine di contribuzione, supponendo l'assorbimento del mercato e la stabilità dei prezzi) è valutabile in circa 3000 €/ha per la lattuga e 5000 €/ha per le patate.

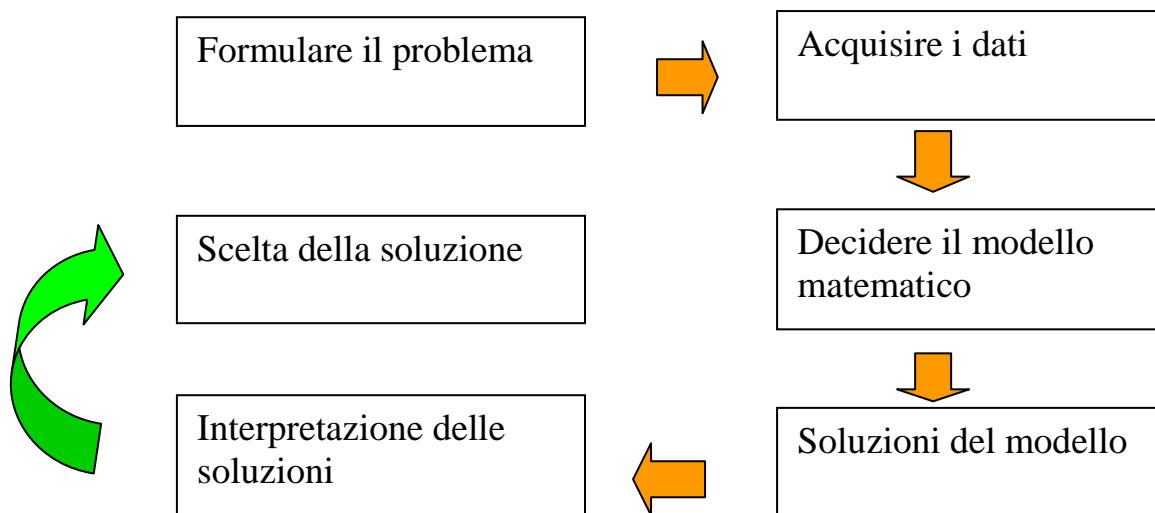
L'assorbimento delle risorse è il seguente:

- 15 kg/ha di semi e 10 t/ha di stallatico per la lattuga
- 3 t/ha di tuberi e 20 t/ha di stallatico per le patate.

L'agricoltore vuole, stante la fattibilità, "ottimizzare" le sue scelte, cioè trarre il massimo utile dall'utilizzo delle risorse a disposizione. Come può decidere il da farsi?



Le fasi della decisione:



Problema:

Quanti ettari devono essere coltivati a lattuga e quanti a tuberi, per rendere massimo il profitto?

Le variabili sono quindi gli ettari da destinare alla coltivazione della lattuga (h1) e quelli da destinare alla coltivazione delle patate (h2).

La funzione da rendere massima è:

$$3000 * h1 + 5000 * h2$$

I dati del problema:

Risorse disponibili	Terreno	Stallatico	Semi di lattuga	Patate da seme
terreno (ha)	12			
Concime stallatico (t)		160		
Semi di lattuga (kg)			165	
Patate da seme (t)				18
Risorse necessarie				
Semi di lattuga (kg/ha)			15	
Stallatico per lattuga (t/ha)		10		
Patate da seme (t/ha)				3
Stallatico per patate (t/ha)		20		

I vincoli del problema:

Per il terreno:

$$h_1 + h_2 \leq 12 \text{ con } h_1 \geq 0 \text{ e } h_2 \geq 0$$

Per le coltivazioni:

$$15 * h_1 \leq 165$$

$$3 * h_2 \leq 18$$

$$10 * h_1 + 20 * h_2 \leq 160$$

Per trovare la soluzione ottimale si può procedere nei seguenti modi:

- 1) Empiricamente assegnando valori progressivi agli ettari coltivati a lattuga e a quelli coltivati a tuberi, sempre senza superare i 12 complessivi
- 2) Matematicamente.

1) Metodo empirico

Il modo più rapido è la compilazione di una tabella in Excel in cui alcune celle calcolano i risultati ottenuti assegnando gli ettari coltivati a ciascun prodotto:

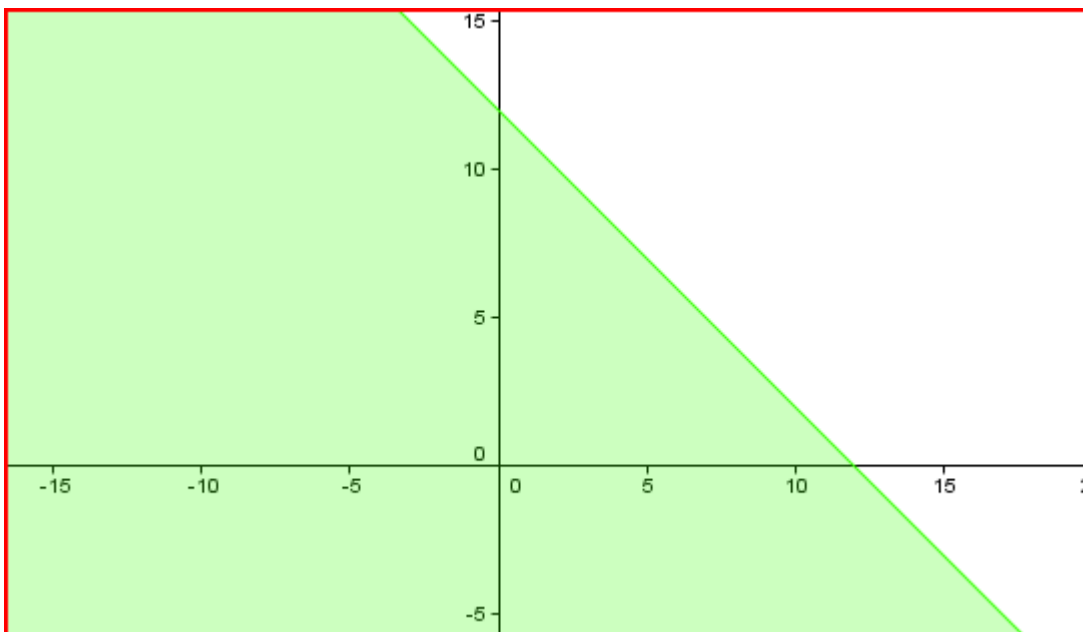
Resa economica	h1 (lattuga)	h2 (tuberi)	tot. ettari (h1+h2)	tot. Stallatico 10*h1+20*h2	tot. semi lattuga (≤165)	tot patate da seme (≤18)	stallatico /h lattuga (t)	semi /h per lattuga (kg)	stallatico /h tuberi (t)	semi /h per tuberi (t)
58.000	1	11	12	230	15	33	10	15	20	3
56.000	2	10	12	220	30	30	Soluzione ammissibile	Soluzione ammissibile	Soluzione ammissibile	Soluzione ammissibile
54.000	3	9	12	210	45	27				
52.000	4	8	12	200	60	24				
50.000	5	7	12	190	75	21				
48.000	6	6	12	180	90	18				
46.000	7	5	12	170	105	15				
44.000	8	4	12	160	120	12				
42.000	9	3	12	150	135	9				
40.000	10	2	12	140	150	6				
38.000	11	1	12	130	165	3				
36.000	12	0	12	120	180	0				
60.000	0	12	12	240	0	36				

Dalla tabella emerge che:

- Occorrono comunque entrambe le tipologie di colture per raggiungere il massimo coltivabile di 12 ettari disponibili
- Ci sono solo quattro situazioni ammissibili sulle 13 possibili; le altre infatti non verificano le condizioni di disponibilità o dei semi o del concime
- Tra le soluzioni ammissibili, la più conveniente propone di coltivare 8 ettari a lattuga e 4 a patate; la contribuzione risulta di € 44000.

2) Metodo matematico

In un diagramma cartesiano in cui poniamo in ascisse gli ettari coltivati a lattuga (h_1) e in ordinate quelli coltivati a tuberi (h_2), rappresentiamo graficamente le disequazioni che esprimono i vincoli. Il bordo di ciascun vincolo corrisponde ad una retta; ad esempio la retta $h_1 + h_2 = 12$ corrisponde al bordo del vincolo riguardante gli ettari a disposizione. Il semipiano ammissibile è quello che ricade in basso a sinistra rispetto alla retta.



Considerando anche gli altri vincoli possiamo completare la rappresentazione della regione ammissibile.

Per le coltivazioni:

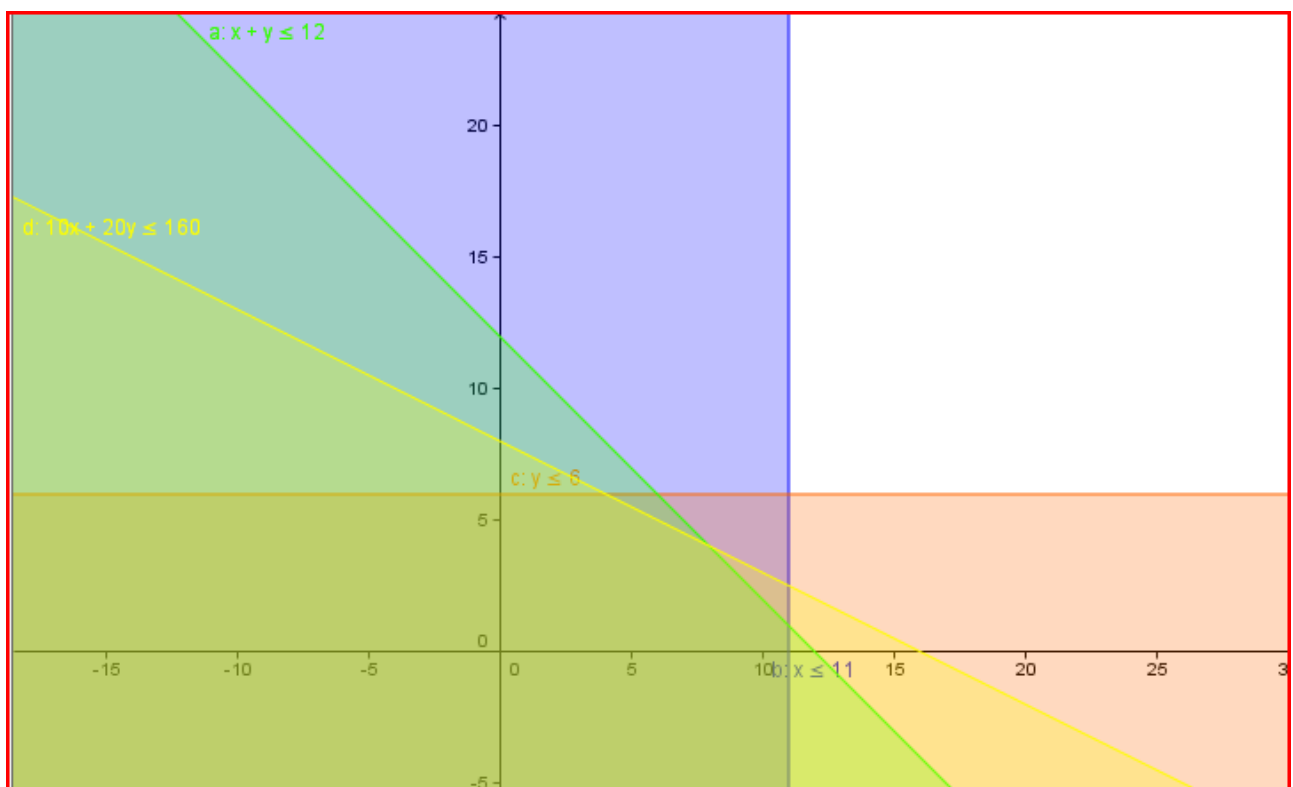
$$15 * h1 \leq 165 \text{ (retta r1)}$$

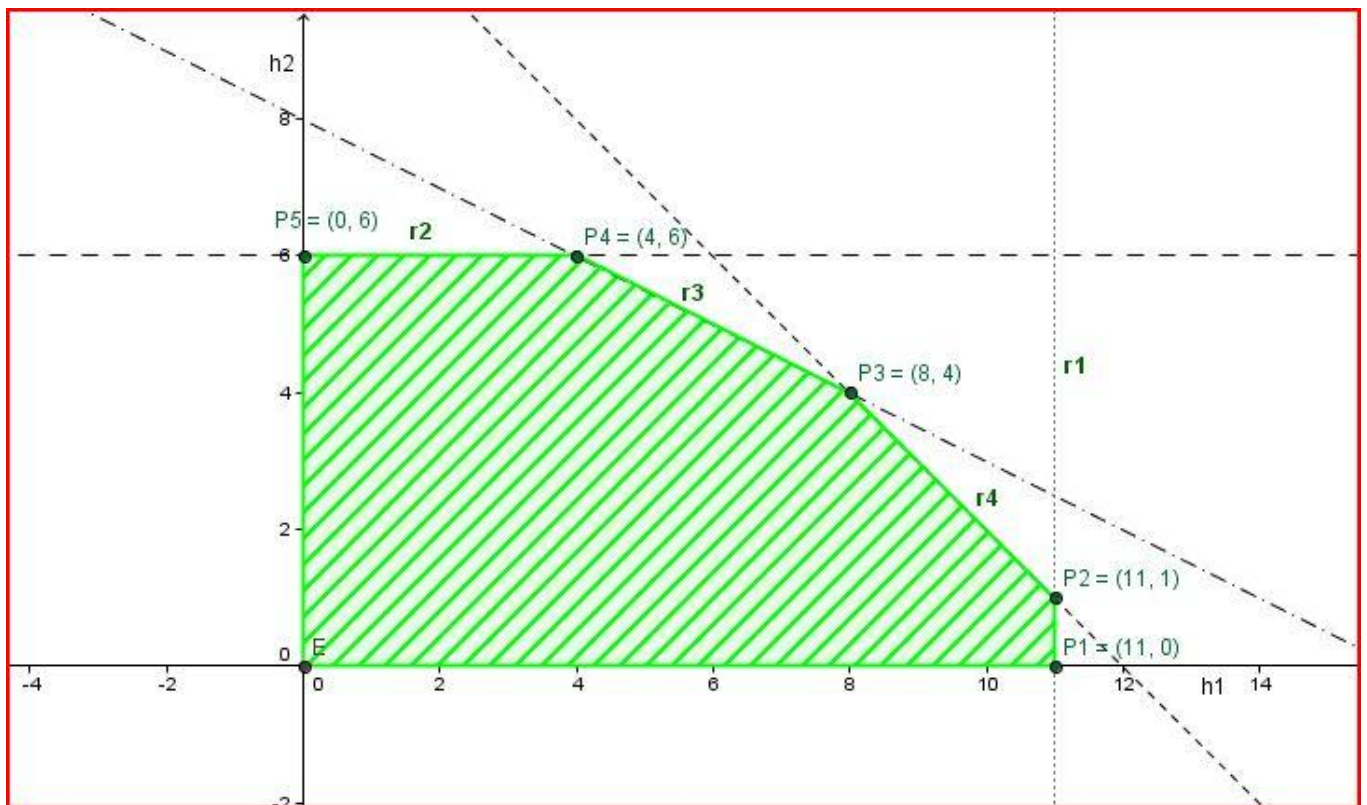
$$3 * h2 \leq 18 \text{ (retta r2)}$$

$$10 * h1 + 20 * h2 \leq 160 \text{ (retta r3)}$$

Per il terreno:

$$h1 + h2 \leq 12 \text{ dove } h1 \geq 0 \text{ e } h2 \geq 0 \text{ (retta r4)}$$





Le soluzioni possibili appartengono all'area delimitata dagli assi coordinati e dalle rette disegnate; ogni punto dell'area corrisponde ad una possibile combinazione di coltivazioni. Ovviamente tali soluzioni sono infinite, per cercare la migliore possiamo restringere il campo di ricerca osservando che una soluzione ottimale deve sfruttare al massimo almeno una risorsa. Questo significa che possiamo concentrarci sui punti che appartengono al bordo della regione ammissibile, anzi, spingendo oltre la considerazione, possiamo concentrarci sui soli vertici, in quanto intersezione di due rette e quindi in grado di ottimizzare due vincoli.

Tra tutti i vertici, vista la natura della funzione di valutazione della soluzione che ha coefficienti positivi, possiamo sicuramente scartare l'origine (che dà 0 come soluzione) e i punti $P_1=(11,0)$ dominato da $P_2=(11,1)$ e $P_5=(0,6)$ dominato da $P_4=(4,6)$. Non rimane quindi che valutare i punti $P_2=(11,1)$, $P_3=(8,4)$ e $P_4=(4,6)$.

Per stabilire la soluzione ottimale, quella cioè che rende massimo il profitto del nostro agricoltore, è quindi sufficiente sostituire le coordinate di ciascuno di questi punti che, come sappiamo, individuano gli ettari coltivati nelle rispettive colture, nella funzione obiettivo

$$f(h_1, h_2) = 3000 * h_1 + 5000 * h_2$$

si ottengono i seguenti valori:

Punto P	h1(P)	h2(P)	f(P)
P2	11	1	38000
P3	8	4	44000
P4	4	6	42000

La soluzione ottimale è pertanto quella che prevede 8 ettari coltivati a lattuga e 6 a patate ed è la stessa soluzione trovata con il metodo empirico mostrato precedentemente.

Limiti:

Il metodo utilizzato per risolvere il problema del coltivatore presenta dei limiti nell'applicazione quando il numero n di variabili è maggiore di 3. Il numero dei vertici del poliedro ammissibile potrebbe risultare molto elevato rendendo estremamente laboriosa l'applicazione delle disequazioni; ciascun vertice corrisponderebbe infatti all'intersezione di n rette.

Esercizio:

Fornire la rappresentazione geometrica e la soluzione ottima del seguente problema:

Una scatola di montaggio ci mette a disposizione pezzi di diverso colore e dimensione, ognuno rappresenta una particolare componente di un telefono cellulare. Abbiamo 10 moduli display (colore blu), 18 moduli di memoria (colore verde), 12 moduli di trasmissione (di colore giallo), 21 tastierini a 6 tasti (di colore rosso). 9 tastiere di navigazione (di colore bianco) e 10 microcamere (

di colore rosa). Componendo opportunamente questi elementi possiamo confezionare dei telefonini di due diversi modelli A e B. Ogni telefono di tipo A ci fa guadagnare 3 punti e ogni telefono di tipo B ce ne fa guadagnare 8. Il gioco consiste nell'assemblare le componenti a disposizione cercando di totalizzare il maggior punteggio possibile.

