

Grandezze proporzionali e applicazioni

Lezione strutturata in 4 ore.

Utilizzo della LIM sia per la presentazione della lezione che per la discussione e ricerca di esercizi da svolgere.

Prerequisiti

- Conoscenza delle frazioni, delle proporzioni e dei rapporti fra grandezze, il piano cartesiano

Obiettivi

Conoscenze

- Corrispondenza biunivoca fra classi di grandezze omogenee.
- Proporzionalità diretta ed inversa fra classi.
- Proporzioni ed equivalenze.
- Proporzioni e percentuali.

Abilità

- Individuare grandezze direttamente ed inversamente proporzionali.
- Ricerca del quarto proporzionale.
- Problemi del tre semplice e del tre composto.
- Eseguire il calcolo delle percentuali.

Competenze

Rilevare, in situazioni problematiche, relazioni di proporzionalità. Risolvere problemi e modellizzare situazioni in diversi campi della vita quotidiana.

Corrispondenza biunivoca

Due classi di grandezze **X** e **Y** sono in **corrispondenza biunivoca** se ad ogni valore della prima grandezza corrisponde un solo valore della seconda e viceversa, ad ogni valore della seconda corrisponde un solo valore della prima.

X Ore (di rilevazione)	Y Temperatura (°C)
0	9
4	10
8	18
12	20
16	23
20	18
24	9

Sono in corrispondenza ma non biunivoca

X Peso (g)	Y Costo (euro)
1	5
2	10
3	15
...	...
10	50
...	...
15	75

Sono in corrispondenza biunivoca

Grandezze direttamente proporzionali

Siano **X** e **Y** due classi di grandezze omogenee (riferite ad una stessa sostanza) in corrispondenza biunivoca. Esse sono **direttamente proporzionali** se i rapporti di elementi corrispondenti sono uguali.

	X Lato dell'esagono (cm)	Y Perimetro (cm)	
2 : 1 	1	6	 12 : 6
	2	12	
	3	18	
	4	24	

CORRISPONDENZA TRA LE COLONNE $2 : 1 = 12 : 6$ oppure $3 : 2 = 18 : 12$

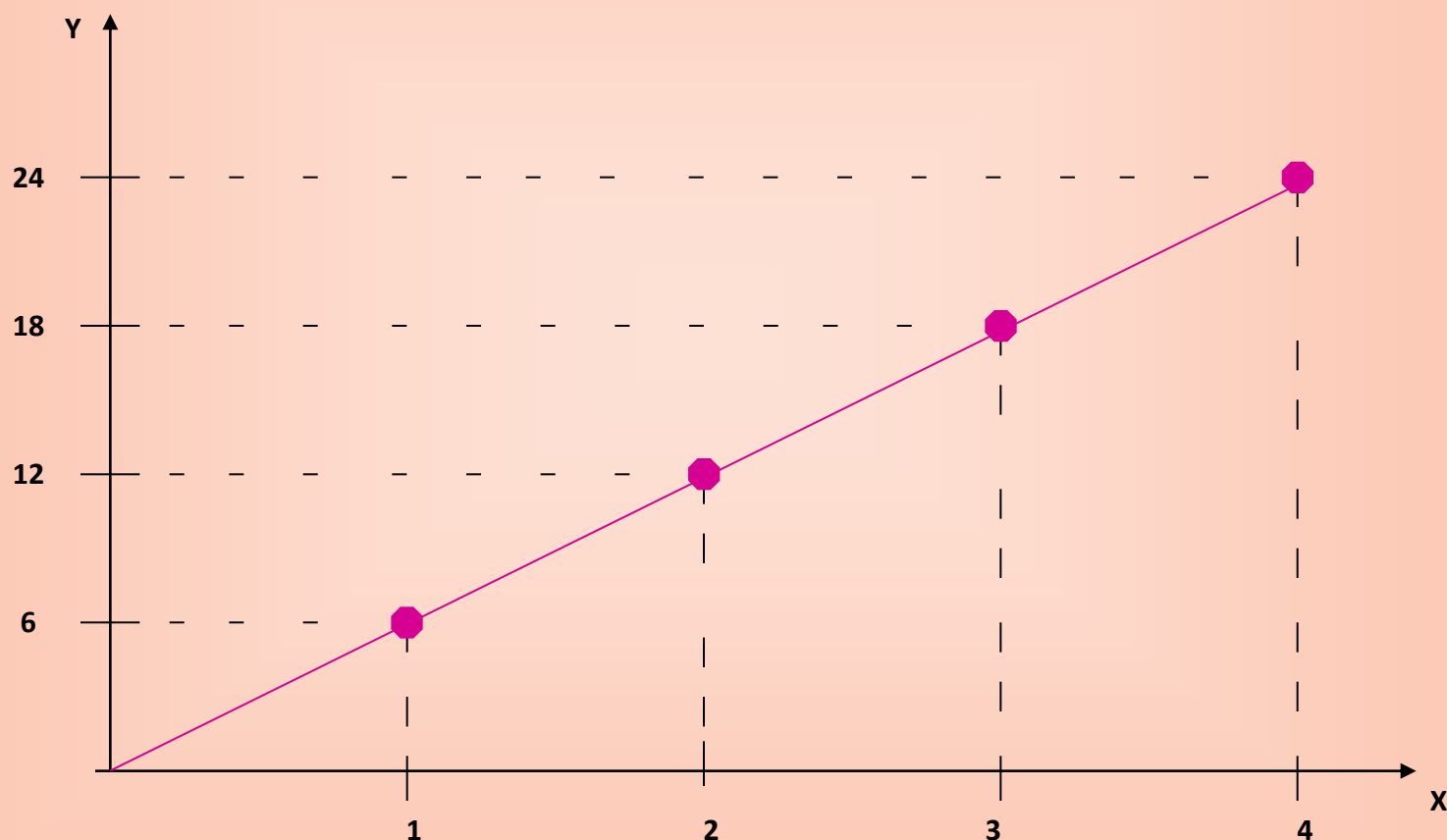
X Lato dell'esagono (cm)	Y Perimetro (cm)
1	6
2	12
3	18
4	24

CORRISPONDENZA TRA LE RIGHE $1 : 6 = 2 : 12 = 3 : 18 = 4 : 24 =$ k

$$X = k Y$$

**COSTANTE
PROPORZIONALITA'
DIRETTA (k)**

Si consideri, ora, un piano cartesiano in cui sull'asse delle ascisse vengono riportate la misura dei lati e sull'asse delle ordinate i perimetri relativi a ciascun esagono.



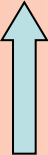
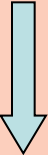
Possiamo concludere che due grandezze direttamente proporzionali ***sono rappresentate mediante una retta passante per l'origine.*** (Proporzionalità implica linearità).

Grandezze inversamente proporzionali

Siano **X** e **Y** due classi di grandezze omogenee (riferite ad una stessa sostanza) in corrispondenza biunivoca. Esse sono **inversamente proporzionali** se il prodotto tra elementi corrispondenti è costante.

X Numero degli operai		Y Tempo impiegato per eseguire un lavoro (gg)
1	$1 \cdot 36$	36
3	$3 \cdot 12$	12
6		6
9		4

CORRISPONDENZA TRA LE RIGHE $1 \cdot 36 = 3 \cdot 12 = 6 \cdot 6 = 9 \cdot 4 = k$

	X Numero degli operai	Y Tempo impiegato per eseguire un lavoro (gg)	
3 : 1 	1	36	 36 : 12
	3	12	
	6	6	
	9	4	

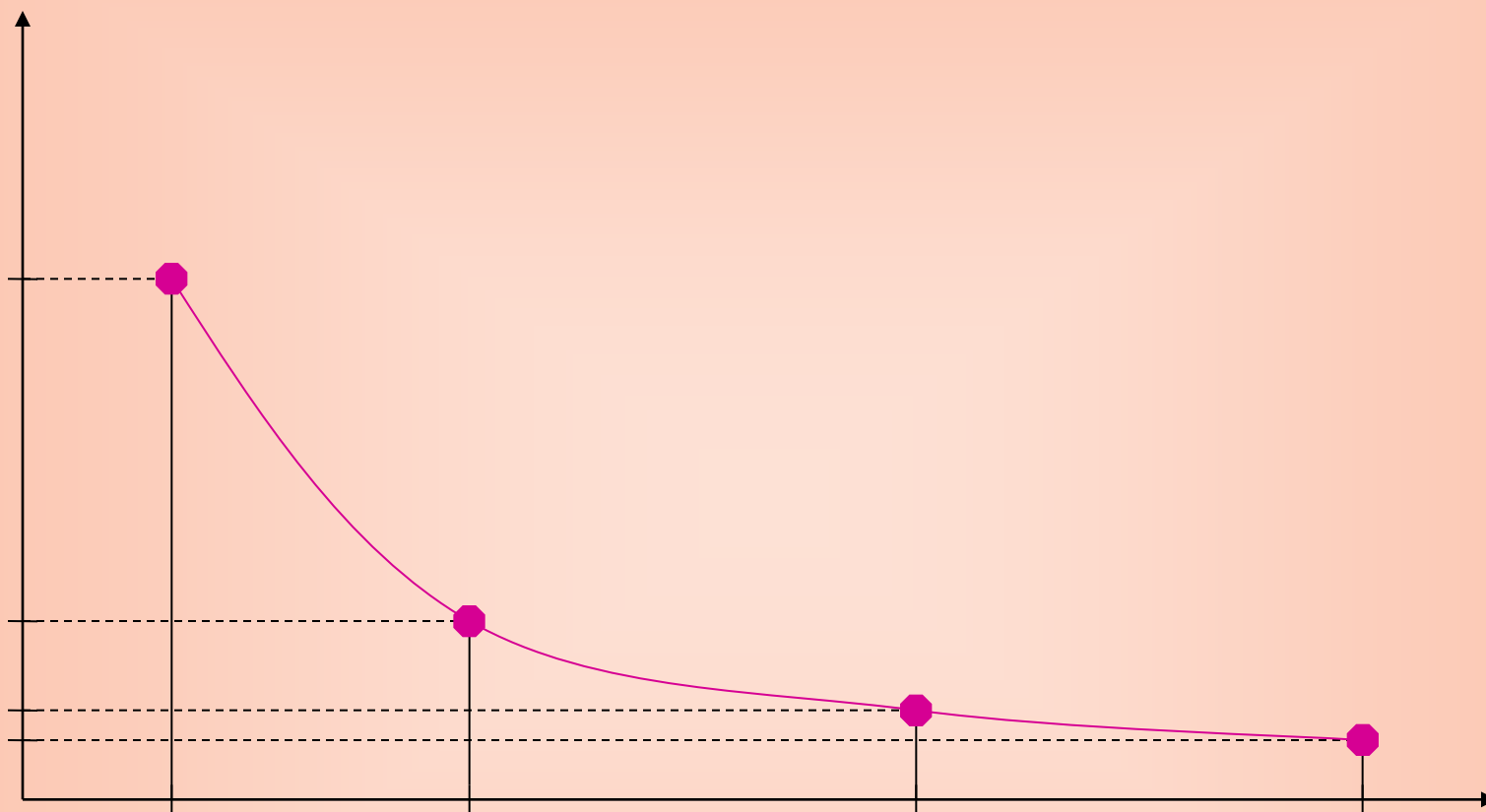
CORRISPONDENZA TRA LE COLONNE $3 : 1 = 36 : 12$ oppure $9 : 3 = 12 : 4$

La costante k che viene fuori dal prodotto di elementi corrispondenti di ciascuna classe è detta **COSTANTE DI PROPORZIONALITA' INVERSA**.



$$X Y = k$$

Si consideri, ora, un piano cartesiano in cui sull'asse delle ascisse vengono riportati il numero di operai e sull'asse delle ordinate il tempo impiegato per eseguire un lavoro.



Possiamo concludere che due grandezze inversamente proporzionali ***sono rappresentate mediante una curva detta iperbole equilatera.***

Problemi del tre semplice: la ricerca del quarto proporzionale

Quando in un problema riconosciamo che le grandezze sono legate tra loro da un rapporto di proporzionalità diretta o inversa ci troviamo di fronte ai problemi del tre semplice. Meglio noti come ricerca del quarto proporzionale.

ESEMPIO 1:

Una ruota compie 84 giri in 12 minuti; quanti giri compie in 20 minuti?



N° GIRI		MINUTI IMPIEGATI	
↑	84	12	↑
	x	20	

Allora, essendo grandezze direttamente proporzionali:
 $x : 84 = 20 : 12$. Quindi applicando le proprietà delle proporzioni $x = 140$ giri.

ESEMPIO 2

Una nave ha viveri sufficienti per 96 giorni per tutto il personale imbarcato. All'atto della partenza si imbarcano 56 persone in più del previsto, per cui i viveri risultano bastanti per 16 giorni in meno (senza diminuire le razioni giornaliere preventivate). Calcola quante persone avrebbe dovuto avere a bordo la nave inizialmente.

N° PASSEGGERI	GIORNI (gg)
x	96
$x+56$	80

Allora, essendo grandezze inversamente proporzionali:

$$x+56 : x = 96 : 80$$

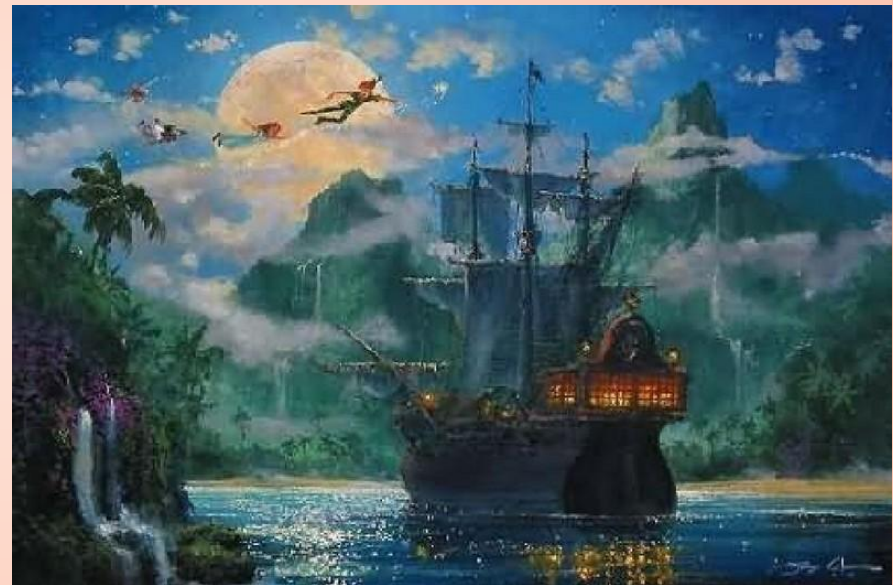
Come la risolvereste?

Applicando la proprietà dello scomporre avremo che

$$x+56-x : x = 96-80 : 80$$

$$56 : x = 16 : 80$$

$$x = 280 \text{ giorni}$$



Estathè come se fosse acqua

ESEMPIO 3

Secondo una statistica fatta in una scuola superiore di I grado, i ragazzi delle medie consumano una media di 4 bric di Estathè al giorno. Sapendo che in 100 ml sono contenuti 11 g di carboidrati (zuccheri) determinare la quantità di zucchero assimilata e confrontarla con la quantità di carboidrati giornalieri che dovrebbe assimilare un ragazzo di 12/13 anni (211 g di carboidrati al giorno).

Materiale occorrente : un bric di Estathè ed una bustina di zucchero (quelle che troviamo nei bar) in cui poter leggere i valori energetici e la quantità di prodotto contenuti in entrambi.





Leggendo l'etichetta alimentare di un bric di estathé, vediamo che sono 11 g la quantità di carboidrati riportata, ma per 100 ml di bevanda.

L'Estathé è classicamente venduto in bric di plastica da 20 cl. Si trova anche in comuni lattine da 33 cl e in bottiglie da 50 cl o 1.50 l .

Quindi la prima domanda che ci poniamo è : quanti zuccheri sono contenuti in ciascuno di quaesti "formati"?

Cosrtuiamo la tabella, ponendo particolare attenzione alle unità di misura:

PESO ZUCCHERI (g)

11
x

QUANTITA' DI THE (ml)

100
200 (bric)

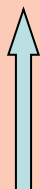
La proporzione è: $x : 11 = 200 : 100$, quindi $x = 22$ g , ovvero 88 g di zuccheri contro i 211 che dovrebbero essere assimilati giornalmente.

Una volta applicata questa tecnica per trovare i carboidrati contenuti rispettivamente nella lattina e nelle lattine da 50 cl e da 1,50 l si domanda ai ragazzi:

Ma 22 g di zucchero a quante bustine corrispondono?

In una bustina ci sono 4 g circa di zucchero. Allora ci chiediamo a quante bustine corrispondono i 22 g contenuti in un bric di estahè.

N° DI BUSTINE DI ZUCCHERO



1

x

ZUCCHERO (g)

4

22



$x : 1 = 22 : 4$ quindi x equivale a 5,5 bustine di zucchero.

Ricordando che i ragazzi bevono di media 4 estahè al giorno questi corrispondono a **22 bustine di zucchero**.



Problemi del tre composto

Già con il problema mostrato precedentemente, si cominciano ad individuare problemi che coinvolgono più di due grandezze che possono essere a due a due o direttamente o inversamente proporzionali. Si individuano le proporzionalità e si suddivide il problema in sotto problemi in cui utilizzare la ricerca del quarto proporzionale.

Dopo aver fatto alcuni semplici esempi, ci occupiamo di alcuni problemi un po' più complessi

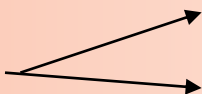
ESEMPIO 4

In un campo scout a cui partecipano 113 ragazzi si ha una scorta di viveri sufficiente per 30 giorni; dopo 3 giorni si aggiungono altri 40 ragazzi. Per quanto tempo, dopo tale data, sarà ancora sufficiente la scorta, se la razione giornaliera viene ridotta a $\frac{9}{10}$ di quella precedente?



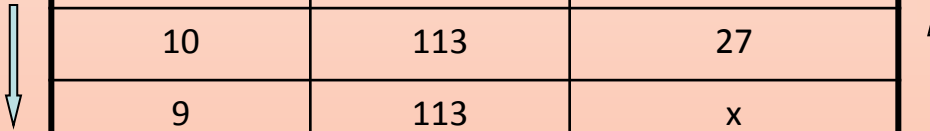
Cerchiamo di modellizzare il problema: tutto procede come si era programmato fino al 6° giorno, pertanto il numero di giorni di sopravvivenza non è più 30 ma 27.

Poiché la razione giornaliera diventa 9/10 rispetto a quella iniziale, allora supponiamo che la razione giornaliera sia passata da 10 a 9 (anche qui normalizziamo).



Razione giornaliera	N° Ragazzi	N° Giorni di sopravvivenza
10	113	27
9	153	x

Notiamo che la prima e la terza colonna sono tra loro inversamente proporzionali, ed anche la seconda e la terza colonna sono inversamente proporzionali. Allora, supponiamo che il numero dei ragazzi non vari, allora avremo:

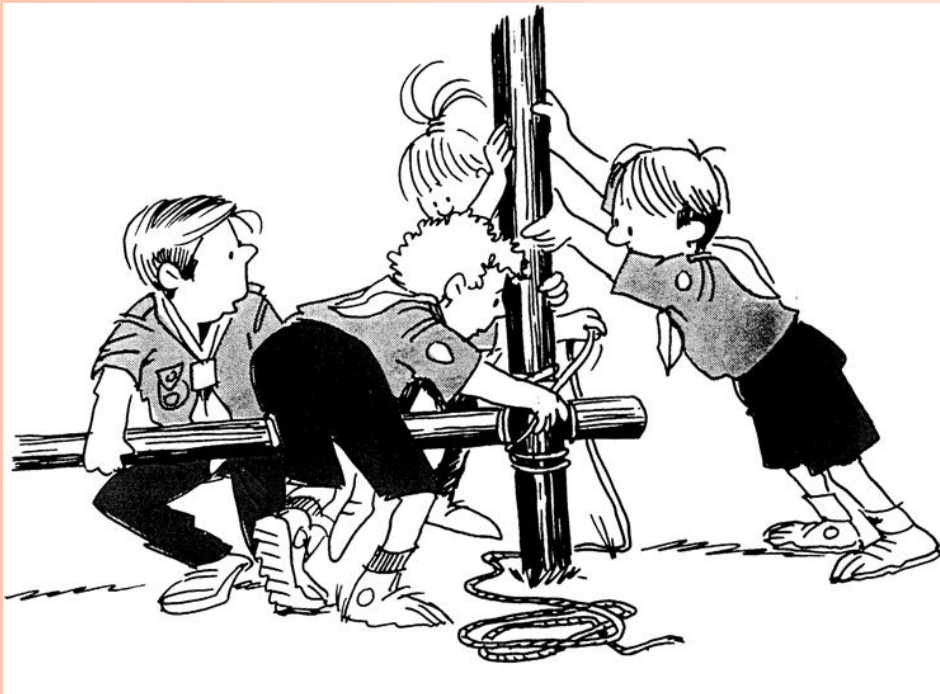


Razione giornaliera	N° Ragazzi	N° Giorni di sopravvivenza
10	113	27
9	113	x

Quindi $10 : 9 = x : 27 \longrightarrow x = 30$ giorni.

Ora supponiamo che i giorni siano tornati 30 ma che i ragazzi siano aumentati:

Razione giornaliera	N° Ragazzi	N° Giorni di sopravvivenza
10	113	30
9	153	x



Quindi avremo che

$$153 : 113 = 30 : x$$



$$x = 22 \text{ giorni (circa)}$$

Pertanto i ragazzi sono costretti ad interrompere il campo scout prima del previsto.

La proporzionalità e le unità di misura

ESEMPIO 5

Su un blocco di 20 fogli Fabriano F2 liscio c'è scritto 110 g/m^2 . Le dimensioni di un singolo foglio sono $24 \times 33 \text{ cm}$. Quanto pesa il blocco, sapendo che il cartoncino esterno pesa 10 g ?

La scrittura 110 g/m^2 sta ad indicare che un foglio avente un'area di 1 m^2 pesa 110 g . Quindi la prima cosa che dobbiamo fare è trovare il peso di un singolo foglio del blocco.

$A = 0,24 \times 0,33 \text{ m}^2 = 0,0792 \text{ m}^2$, quindi:

PESO (g)	AREA (m ²)
110	1
x	0,0792



Quindi $110 : x = 1 : 0,0792$; $x = 8,712 \text{ g}$ (peso di un foglio). Essendo formato da 20 fogli il blocco pesa:
 $20 \bullet 8,712 = 174,24$ (peso di 20 fogli)

$174,24 + 10,00 = 184,24 \text{ g}$. (peso del blocco)

La proporzionalità e la percentuale

ESEMPIO 6

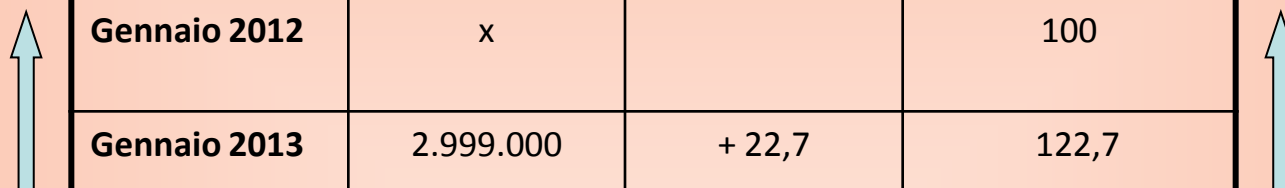
Secondo un sondaggio dell'ISTAT il numero di disoccupati in Italia è aumentato del 22,7 % da Gennaio 2012 a Gennaio 2013, arrivando a quota 2 999 000. Modellizzare il problema e fare previsioni per Dicembre 2013.



Sintetizziamo le informazioni su una tabella:

Data	N° Disoccupati	Aumento(%)
Gennaio 2012		
Gennaio 2013	2.999.000	+ 22,7
Dicembre 2013		

Cerchiamo di risolvere il problema cercando di normalizzarlo. Supponiamo che nel 2012 il numero di disoccupati (%) fosse 100, allora:

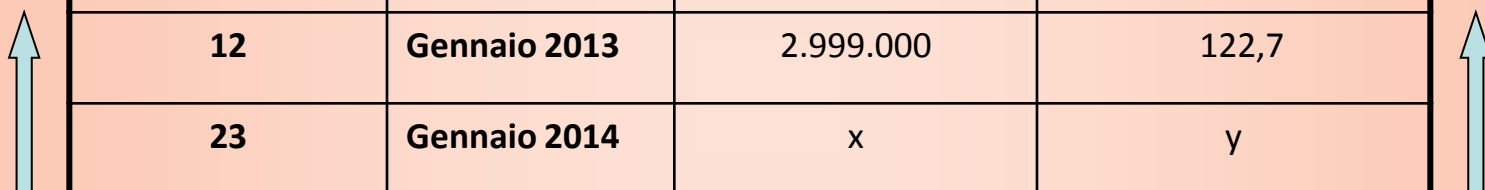


Data	N° Disoccupati	Aumento(%)	N° Disoccupati (%)
Gennaio 2012	x		100
Gennaio 2013	2.999.000	+ 22,7	122,7
Dicembre 2013			

Poichè il numero di disoccupati ed il numero di disoccupati in % sono grandezze direttamente proporzionali, attraverso la ricerca del quarto proporzionale abbiamo che:
 $2.999.000 : x = 122,7 : 100 \longrightarrow x = 2.444.173$ *(n° disoccupati Gennaio 2012)*



Data	N° Disoccupati	N° Disoccupati (%)
Gennaio 2012	2.444.173	100
Gennaio 2013	2.999.000	122,7
Dicembre 2015	x	y

Ci troviamo di nuovo di fronte ad un problema analogo al precedente: non abbiamo informazioni sufficienti per poter trovare i due dati mancanti. Posso però introdurre una nuova colonna relativa alle date (calcolate in mesi):



Mesi trascorsi	Data	N° Disoccupati	N° Disoccupati (%)
0	Gennaio 2012	2.444.173	100
12	Gennaio 2013	2.999.000	122,7
23	Gennaio 2014	x	y

Se ipotizziamo che la colonna relativa agli anni e quella relativa al n° di disoccupati in % sono direttamente proporzionali allora: $23 : 12 = y : 122,7 \longrightarrow y = 235$

Anni trascorsi	Data	N° Disoccupati	N° Disoccupati (%)
0	Gennaio 2012	2.444.173	100
12	Gennaio 2013	2.999.000 	122,7
23	Dicembre 2013	x 	235

Poi riconoscendo una proporzionalità diretta tra la quarta e la terza colonna, utilizzando la proporzionalità per righe avremo:

$$x : 235 = 2.999.000 : 122,7$$

$$x = 5.743.800 \quad (n^{\circ} \text{ disoccupati Dicembre 2013})$$

Prova Invalsi 2013

ESEMPIO 7

Su una risma di carta di fogli formato A4 è scritto: 80 g/m^2 (cioè 80 grammi al metro quadro); quanto pesa un singolo foglio A4 $210 \times 297 \text{ mm}$ (cioè le dimensioni di un foglio A4 sono $0,210 \text{ m}$ e $0,297 \text{ m}$)?

1. 0,5 g
2. 1,5 g
3. 5 g
4. 10 g

ESEMPIO 8

L'Istat prevede che i 15enni italiani saranno circa 592.000, cioè lo 0,95% della popolazione italiana del 2020. Calcola qual è, secondo l'istat, il numero stimato di italiani nel 2020. Esprimi il risultato con un numero intero.

ESEMPIO 9

Il numero di vittime per incidenti stradali dal 2001 al 2007 in una regione italiana è rappresentato dalla seguente tabella:

Anno	N° Vittime
2001	792
2002	776
2003	700
2004	681
2005	635
2006	539
2007	531

Di quale percentuale è diminuito il numero di vittime per incidenti stradali dal 2001 al 2007?

ESEMPIO 10

Considera un quadrato di lato a .

Se si aumenta il lato a del 20 % si ottiene un nuovo quadrato di lato b . Quale delle seguenti misure rappresenta la misura di b ?

1. $20 a$
2. $1,20 a$
3. $a + 20$
4. $a + 0,20$

Di quanto aumenta in percentuale l'area del quadrato di lato b rispetto all'area del quadrato di lato a ?

1. 20%
2. 40%
3. 44%
4. 120%