

# Unità di Apprendimento

---

Progressioni geometriche

# Contesto

---

Fase finale del primo anno del secondo biennio di Liceo scientifico

# Primo problema

---

- ❑ Oggi la mia auto vale 12.000€. Il suo valore diminuisce del 15% all'anno.
- ❑ L'assicurazione costa 800 €/anno e aumenta del 6% ogni anno.
- ❑ Fra quanti anni il valore dell'auto sarà uguale a quello dell'assicurazione?

# Ricapitolando...

---

## Oggetto 1:

- costo attuale:  $A$
- rapporto tra costo in certo anno e costo l'anno precedente:  $a$ .

## Oggetto 2:

- costo attuale:  $B$
- rapporto tra costo in certo anno e costo l'anno precedente:  $b$ .

Domanda. Fra quanti anni i due oggetti avranno lo stesso valore?

# Processi iterativi o geometrici

Oggetto 1: autovettura:

- costo attuale:  $A = 12 \text{ k€}$ ;
- rapporto tra costo in un certo anno e costo l'anno precedente:  $a = 1 - 15\% = 0,85$ .

Costo auto anno 0:  $M_0 = A$

Costo auto anno 1:  $M_1 = M_0 a = Aa$

Costo auto anno 2:  $M_2 = M_1 a = Aa^2$

...

Costo auto anno  $n$ :  $M_n = M_{n-1} a = Aa^n$



$$M_n = Aa^n, n \geq 0$$

Oggetto 2: premio assicurazione auto:

- costo attuale:  $B = 800 \text{ €}$ ;
- rapporto tra costo in un certo anno e costo l'anno precedente:  $b = 1 + 6\% = 1,06$ .

Costo polizza anno 0:  $P_0 = B$

Costo polizza anno 1:  $P_1 = M_0 b = Bb$

Costo polizza anno 2:  $P_2 = M_1 b = Bb^2$

...

Costo polizza anno  $n$ :  $P_n = M_{n-1} b = Bb^n$

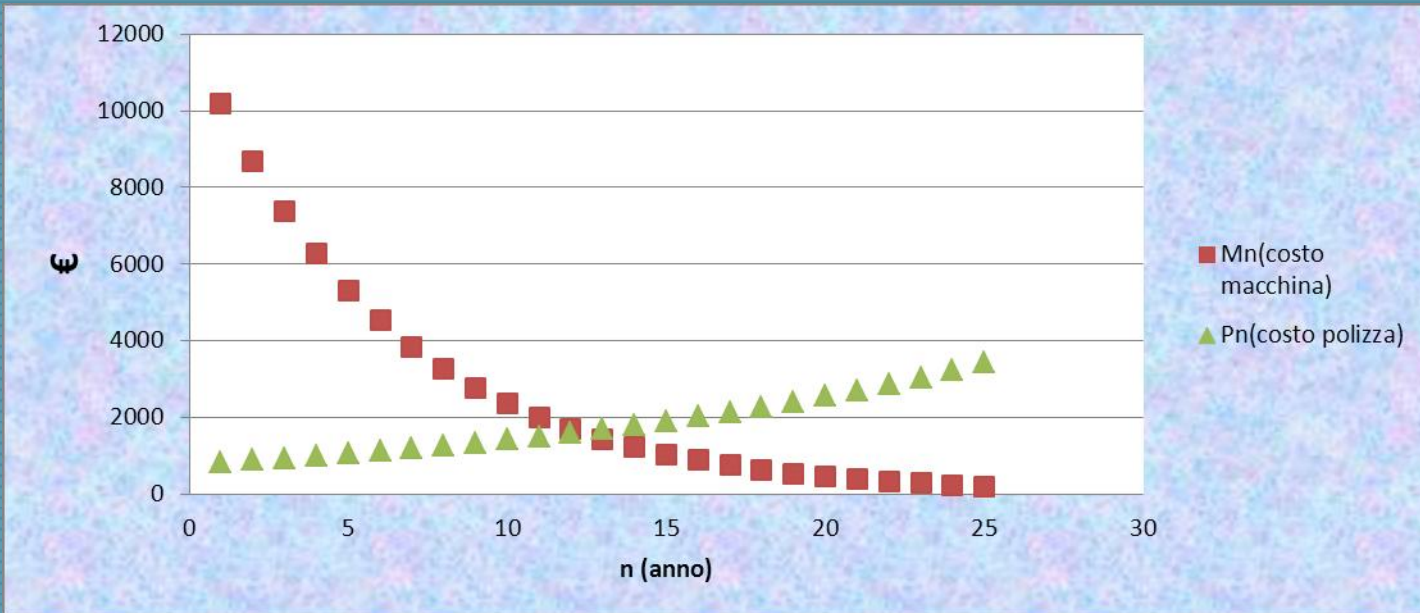


$$P_n = Bb^n, n \geq 0$$

# Confronto

$$M_n = Aa^n, n \geq 0$$

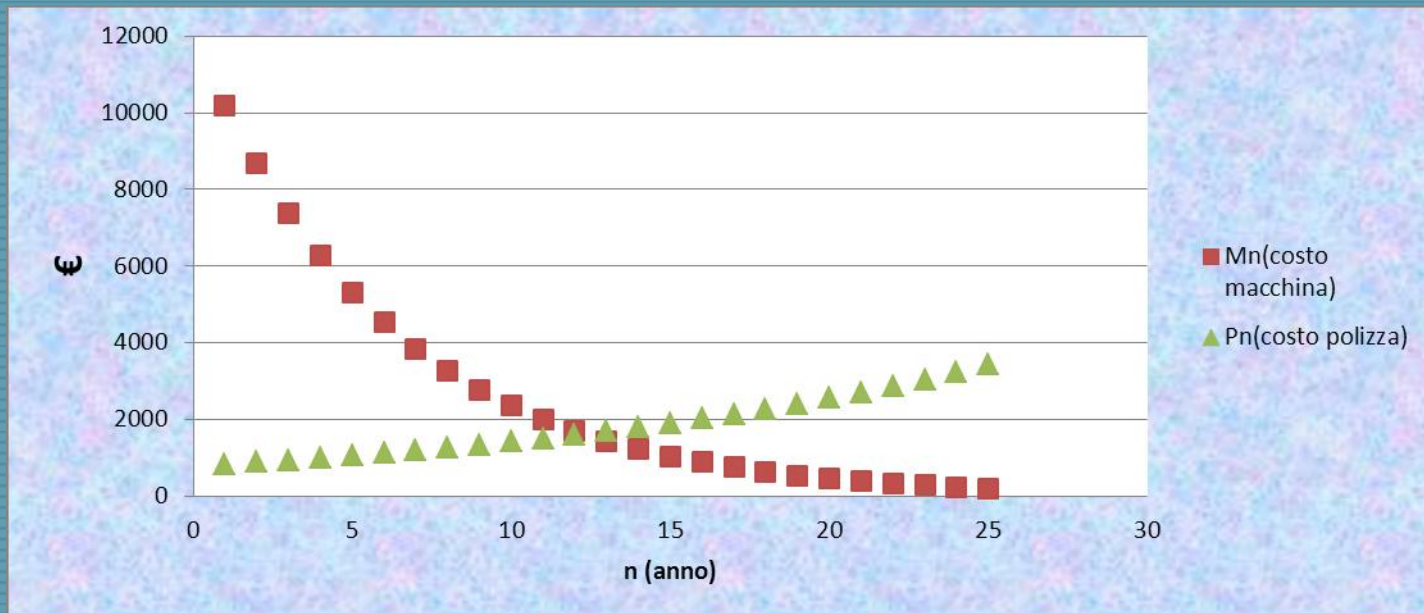
$$P_n = Bb^n, n \geq 0$$



# Risultato

$$M_n > P_n$$

Se  $n > 12$



# Quindi...

---

- ❑ Siamo nel 2013.  
2013 + 12 anni = 2025.  
Il costo del premio assicurazione  
uguaglierà quello dell'auto nel 2025.
- ❑ Allora sarà:  
Costo auto  $\approx 1706$  €  
Costo premio assicurazione  $\approx 1609$  €



# Definizione

---

**In generale, una sequenza**

$$A_0 \quad A_1 \quad A_2 \quad \dots \quad A_n$$

**tale che  $A_k = mA_{k-1}$  con  $k = 1, 2, \dots, n$**

**costituisce una **progressione geometrica**  
di ragione  $m$ .**

---

# Formula chiusa

---

**Termine generale della progressione:**

$$A_k = m^k \cdot A_0 \quad k = 0, 1, \dots, n$$

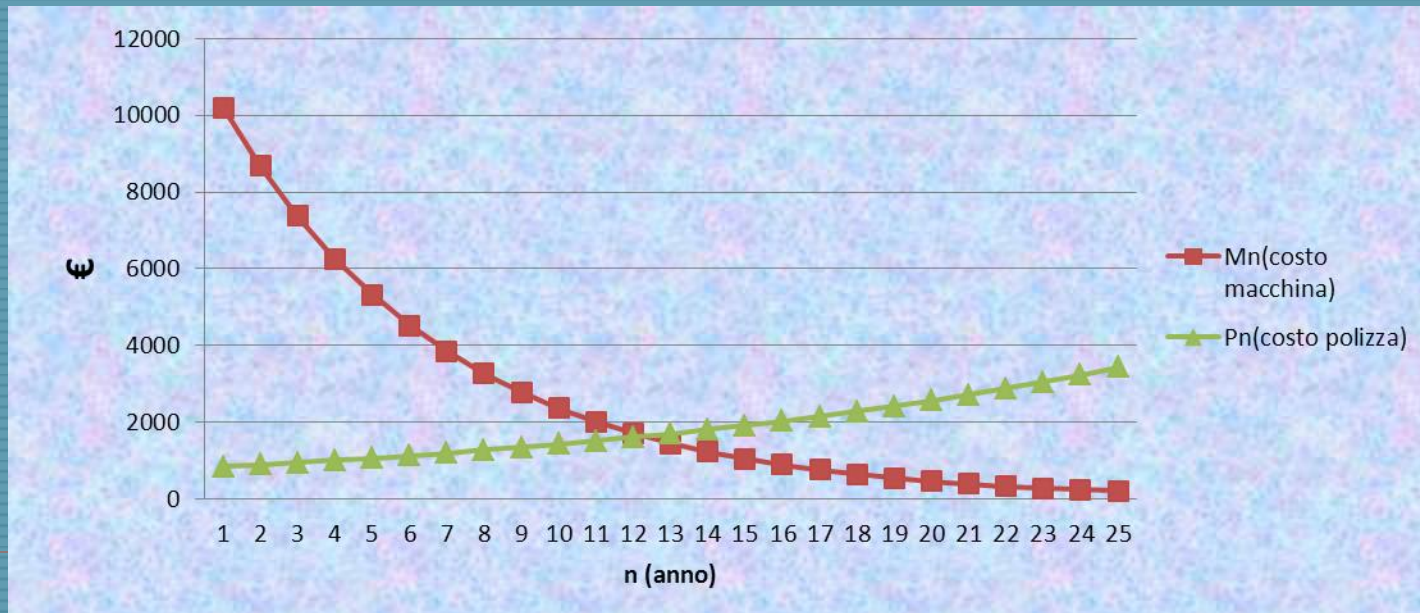
Il termine al passo  $k$  è direttamente proporzionale alla potenza  $k$ -esima della ragione.

Il rapporto incrementale  $A_k / A_0$  è pari alla potenza  $k$ -esima della ragione.

# Curva-sostegno esponenziale

Consideriamo l'esempio precedente:

I punti  $(n, Aa^n) = (\text{stadio}, \text{valore iterato corrispondente})$  associati al processo appartengono alla curva sostegno di equazione  $y = y(x) = Aa^x$ , che è una funzione esponenziale. Stessa cosa si può dire per i punti  $(n, Bb^n)$ .



## ....viceversa

---

Assegnata una funzione esponenziale  $f(x)=Aa^x$ , le immagini dei punti di ascissa intera  $f(0), f(1), f(2), \dots, f(n), \dots$  costituiscono un processo geometrico (di ragione  $a$  e primo termine  $A$ )

$$A \quad Aa \quad Aa^2 \quad \dots \quad Aa^n$$

che rappresenta la **discretizzazione** del modello continuo.

# Secondo problema

---

Voglio valutare la convenienza (o non convenienza) di stipulare in età giovanile un contratto con una società di assicurazioni, nella prospettiva di poter disporre in futuro di una pensione integrativa.

A quanto ammonterà il capitale in un certo anno?

# Ipotesi semplificative (deterministiche) di partenza

---

- ❑ Capitale da versare ogni anno:  
 $K = 1000 \text{ €}$
- ❑ Interesse del capitale investito: tasso fisso del 7% annuo
- ❑ Inflazione stimata (ipotizzata costante nel tempo): 3% annuo

# Crescita del capitale

---

Occorre distinguere fra:



crescita del capitale in  
**termini puramente  
monetari**  
(a quanti euro  
ammonterà il capitale tra  
tot anni)

crescita del capitale in  
**termini di potere  
d'acquisto**  
(che cosa si potrà  
comperare con quel  
capitale tra tot anni)

# Quanto risparmierei, considerando l'inflazione

---

Anno	Risparmio di quell'anno
0	$k$
1	$k \cdot 1,03$
...	...
$n$	$k \cdot 1,03^n$
...	...
48	$k \cdot 1,03^{48}$
49	$k \cdot 1,03^{49}$



# Problema di capitalizzazione composta

Anno	Risparmio di quell'anno	Importo risultante all'anno $N$
0	$k$	$k \cdot 1,07^N$
1	$k \cdot 1,03$	$(k \cdot 1,03) \cdot 1,07^{N-1}$
...	...	...
$n$	$k \cdot 1,03^n$	$k \cdot 1,03^n \cdot 1,07^{(N-n)}$
...	...	...
$N-1$	$k \cdot 1,03^{48}$	$(k \cdot 1,03^{N-1}) \cdot 1,07$
$N$	$k \cdot 1,03^{49}$	$(k \cdot 1,03^N)$

La somma dei primi  $n$  addendi dell'ultima colonna dà l'ammontare complessivo del capitale, comprensivo degli interessi maturati al termine degli  $n$  anni

# MI SERVE LA SOMMA DI TERMINI DI UNA PROGRESSIONE GEOMETRICA!

## TEOREMA

La somma  $S_n$  dei primi  $n$  termini di una progressione geometrica di ragione  $m$  diversa da 1 è:

$$S_n = A_0 \frac{1 - m^{k+1}}{1 - m}$$

## DIMOSTRAZIONE

Scriviamo  $S_n$  per esteso:

$$S_n = A_0 + A_1 + A_2 + \dots + A_n .$$

Sostituendo  $A_n = A_0 m^k$  :

$$S_n = A_0 + A_0 m + A_0 m^2 + \dots + A_0 m^k .$$

Moltiplicando tutto per  $q$ :

$$S_n q = A_0 m + A_0 m^2 + A_0 m^3 + \dots + A_0 m^{k+1} .$$

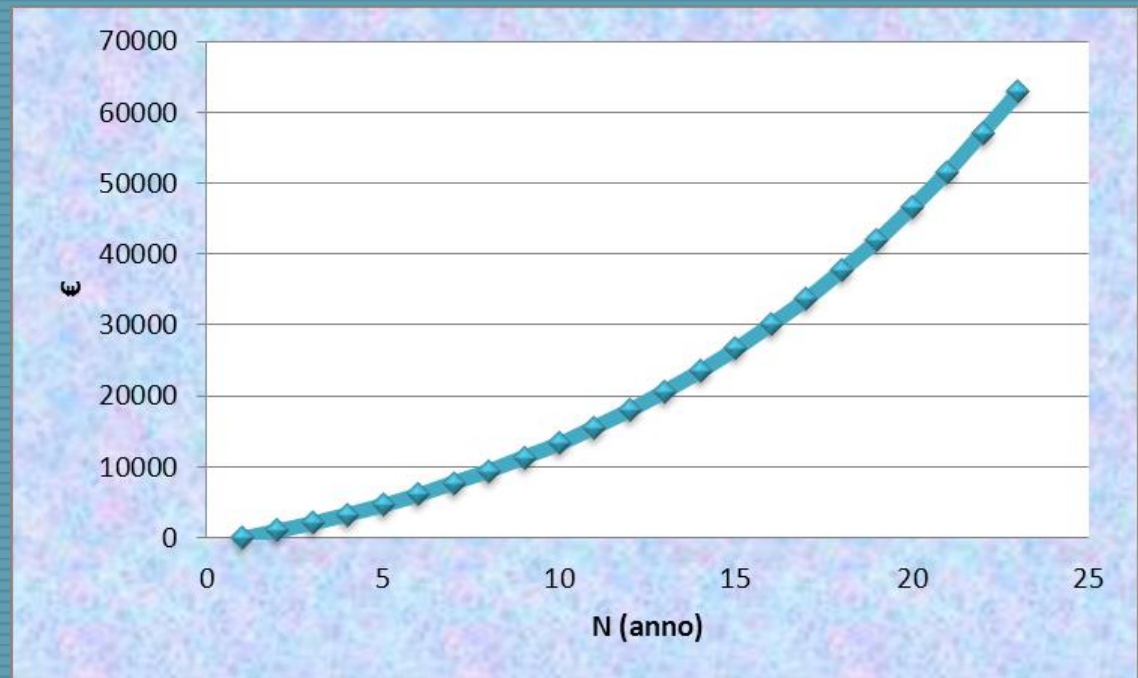
Sottraendo membro a membro le ultime due equazioni:

$$S_n m - S_n = A_0 m^{k+1} - A_0 \quad \longrightarrow \quad S_n (m - 1) = A_0 (m^{k+1} - 1) \quad \longrightarrow \quad S_n = A_0 \frac{1 - m^{k+1}}{1 - m}$$

# Ammontare complessivo del capitale

Quindi nel nostro caso:

$$\begin{aligned} S_N &= k \sum_{n=0}^N 1,03^n \cdot 1,07^{N-n} = \\ &= k \cdot 1,07^N \sum_{i=0}^N \left( \frac{1,03}{1,07} \right)^n = \\ &= k \cdot 1,07^N \frac{1 - \left( \frac{1,03}{1,07} \right)^{N+1}}{1 - \left( \frac{1,03}{1,07} \right)} \end{aligned}$$



# Ammontare complessivo del capitale

---

Ad esempio al termine del decimo anno in termini monetari il capitale, comprensivo degli interessi, ammonterà a circa:

$$S_{10} = k \cdot 1,07^{10} \frac{1 - \left(\frac{1,03}{1,07}\right)^{11}}{1 - \left(\frac{1,03}{1,07}\right)} \approx 180000\text{€}$$

# Quanto al potere d'acquisto reale

Tenuto conto dell'ipotesi che la moneta si deprezzi mediamente del 3% annuo, occorre però dividere gli importi per  $1,03^N$ :

