Funzione Esponenziale e Logaritmo

Sara Bordoni

11 giugno 2013

Problema

Steve è un ragazzo sempre alla moda, è appassionato di elettronica e cerca sempre di acquistare gli ultimi ritrovati della tecnologia. Non può certamente farsi sfuggire il nuovo IPad (Costo 500.00 €). Tuttavia, tra il cellulare nuovo, i videogames e il nuovo computer è un po' a corto di contanti: nel suo salvadanaio sono rimasti solo 50 €!
Il nonno di Steve, un banchiere in pensione, propone al nipote un modo per aumentare il suo capitale: in cambio di alcuni lavoretti in casa, il ragazzo otterrà, ogni settimana, un tasso interesse del 25 %. Steve non vuole aspettare troppo, è un ragazzo molto impaziente! Vuole quindi sapere: dopo quante settimane potrò avere il mio IPad?

Costruzione del modello

Capitale Iniziale di Steve $C = 50$ €,
Tasso di Interesse settimanale $k = 25\%$

Settimana	Montante
	$M_0 = C$
1	$M_1 = (1+k)M_0$
2	$M_2 = (1+k)M_1 = (1+k)^2 M_0$
.	.
.	.
.	.
n	$M_n = (1+k)M_{n-1} = (1+k)^n M_0$

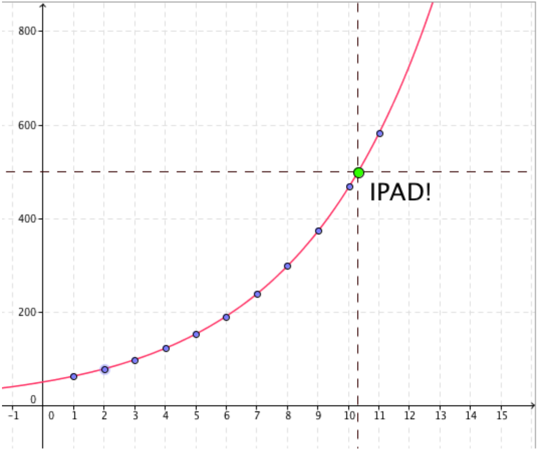
Costruzione del modello

Capitale Iniziale di Steve $\quad C = 50$ €,
Tasso di Interesse settimanale $\quad k = 25\%$

Settimana	Montante
	$M_0 = C$
1	$M_1 = (1+k)M_0$
2	$M_2 = (1+k)M_1 = (1+k)^2 M_0$
.	.
.	.
.	.
n	$M_n = (1+k)M_{n-1} = (1+k)^n M_0$

$$\boxed{M_n = (1+k)^n C}$$

I° METODO: PER TENTATIVI



Settimane	Montante
0	€ 50,00
1	€ 62,50
2	€ 78,13
.	.
.	.
.	.
.	.
.	.
.	.
.	.
10	€ 465,66
11	€ 582,08

Risposta al quesito

II° METODO: TECNICA DELL'INVERSA

Risposta al quesito

II° METODO: TECNICA DELL'INVERSA

$$C(1+k)^n \geqslant 500 \Longleftrightarrow 50(1,25)^n \geqslant 500$$

Risposta al quesito

II° METODO: TECNICA DELL'INVERSA

$$C(1+k)^n \geqslant 500 \Longleftrightarrow 50(1,25)^n \geqslant 500$$

$$(1,25)^n \geqslant 10 \Longrightarrow n \geqslant \log_{1,25} 10$$

Risposta al quesito

II° METODO: TECNICA DELL'INVERSA

$$C(1+k)^n \geqslant 500 \Longleftrightarrow 50(1,25)^n \geqslant 500$$

$$(1,25)^n \geqslant 10 \Longrightarrow n \geqslant \log_{1,25} 10$$

$$\boxed{n \geqslant \frac{\ln 10}{\ln 1,25} \cong 10,32}$$

La prima soluzione intera è n=11.
Occorrono cioè 11 settimane affinché Steve possa acquistare l'IPAD.

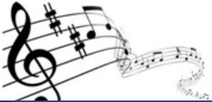
Nota Teorica: Cambiamento di base

$\log_c x = \dfrac{\log_a x}{\log_a c}$

Fenomeni Logaritmici

I nostri sensi sono...

logaritmici?



IL DECIBEL

dB	Intensità sonora
	I_0
1	$I_1 = k\, I_0$
2	$I_2 = k\, I_1 = k^2\, I_0$
.	.
.	.
n	$I_n = k\, I_{n-1} = k^n I_0$
.	.
.	.
200	$I_{200} = k\, I_{n-1} = k^{200} I_0$

$$\boxed{\frac{I_{i+1}}{I_i} = k = 10^{1/10} \cong 1,2589}$$

$I_0 = 10^{-12}\, W/m^2$.

Fenomeni Logaritmici

$$I_n = k^n I_0 \Longrightarrow \frac{I_n}{I_0} = k^n$$

Fenomeni Logaritmici

$$I_n = k^n I_0 \Longrightarrow \frac{I_n}{I_0} = k^n$$

$$n = \log_k \frac{I_n}{I_0} \Longrightarrow n = \frac{\log \frac{I_n}{I_0}}{\log 10^{1/10}}$$

Fenomeni Logaritmici

$$I_n = k^n I_0 \Longrightarrow \frac{I_n}{I_0} = k^n$$

$$n = \log_k \frac{I_n}{I_0} \Longrightarrow n = \frac{\log \frac{I_n}{I_0}}{\log 10^{1/10}}$$

$$\boxed{dB = 10 \log \frac{I_n}{I_0}}$$

Nota Teorica: Cambiamento di base

$\log_c x = \dfrac{\log_a x}{\log_a c}$

Esempi

- Fusa di un gatto $I = 316\, I_0 \rightarrow dB = 10 \log \dfrac{316 I_0}{I_0} \cong 25$
- Considerando che un'esposizione prolungata a suoni oltre gli 85 dB può provocare danni all'udito, considerando che un colpo di fucile calibro 22 ha un'intensità di circa $I = (2,5 \times 10^{13}) I_0$, secondo voi, è meglio seguire le regole e, mentre si spara al poligono, indossare una protezione?

Esempi

- Fusa di un gatto $I = 316\, I_0 \rightarrow dB = 10 \log \frac{316 I_0}{I_0} \cong 25$
- Considerando che un'esposizione prolungata a suoni oltre gli 85 dB può provocare danni all'udito, considerando che un colpo di fucile calibro 22 ha un'intensità di circa $I = (2,5 \times 10^{13}) I_0$, secondo voi, è meglio seguire le regole e, mentre si spara al poligono, indossare una protezione?

$$dB = 10 \log \frac{2,5 \times 10^{13} I_0}{I_0} = 10 \log 2,5 \times 10^{13} \cong 134$$

LA MAGNITUDO STELLARE

Magnitudo Stellare	Luminosità
1	$I_1 = k\, I_5 = k^5\, I_6 = 100\, I_6$
2	$I_2 = k\, I_3 = k^4\, I_6$
3	$I_3 = k\, I_4 = k^3\, I_6$
4	$I_4 = k\, I_5 = k^2\, I_6$
5	$I_5 = k\, I_6$
6	I_6

$$\boxed{k = \frac{I_i}{I_{i+1}} = 10^{2/5} \cong 2,512}$$

$$i = 1, ..., 5$$

Fenomeni Logaritmici

Apparent magnitude	Brightness relative to magnitude 0	Example
−27	6.31×10^{10}	Sun
−26	2.51×10^{10}	
−25	1×10^{10}	
−24	3.98×10^{9}	
−23	1.58×10^{9}	
−22	6.31×10^{8}	
−21	2.51×10^{8}	
−20	1×10^{8}	
−19	3.98×10^{7}	
−18	1.58×10^{7}	
−17	6.31×10^{6}	
−16	2.51×10^{6}	
−15	1×10^{6}	
−14	3.98×10^{5}	
−13	1.58×10^{5}	Full moon
−12	6.31×10^{4}	
−11	2.51×10^{4}	
−10	1×10^{4}	
−9	3.98×10^{3}	Iridium flare
−8	1.58×10^{3}	

Apparent magnitude	Brightness relative to magnitude 0	Example
−7	631	SN 1006 supernova
−6	251	ISS (max)
−5	100	Venus (max)
−4	39.8	
−3	15.8	Jupiter (max), Mars (max)
−2	6.31	Mercury (max)
−1	2.51	Sirius
0	1	Vega, Saturn (max)
1	0.398	Antares
2	0.158	Polaris
3	0.0631	Cor Caroli
4	0.0251	Acubens
5	0.01	Vesta (max), Uranus (max)
6	3.98×10^{-3}	typical limit of naked eye[note 1]
7	1.58×10^{-3}	Ceres (max)
8	6.31×10^{-4}	Neptune (max)
9	2.51×10^{-4}	
10	1×10^{-4}	typical limit of 7x50 binoculars
11	3.98×10^{-5}	
12	1.58×10^{-5}	

Apparent magnitude	Brightness relative to magnitude 0	Example
13	6.31×10^{-6}	3C 273 quasar
14	2.51×10^{-6}	Pluto (max)
15	1×10^{-6}	
16	3.98×10^{-7}	Charon (max)
17	1.58×10^{-7}	
18	6.31×10^{-8}	
19	2.51×10^{-8}	
20	1×10^{-8}	
21	3.98×10^{-9}	Callirrhoe (satellite of Jupiter)
22	1.58×10^{-9}	
23	6.31×10^{-10}	
24	2.51×10^{-10}	
25	1×10^{-10}	Fenrir (satellite of Saturn)
26	3.98×10^{-11}	
27	1.58×10^{-11}	visible light limit of 8m telescopes
28	6.31×10^{-12}	
29	2.51×10^{-12}	
30	1×10^{-12}	
31	3.98×10^{-13}	
32	1.58×10^{-13}	visible light limit of HST

E adesso un po' di matematica...

$$\frac{I}{I_0} = k^{-m} \Longrightarrow -m = \log_k \frac{I}{I_0}$$

$$-m = \frac{\log \dfrac{I}{I_0}}{\log 10^{2/5}}$$

E adesso un po' di matematica...

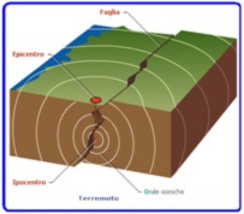
$$\frac{I}{I_0} = k^{-m} \Longrightarrow -m = \log_k \frac{I}{I_0}$$

$$-m = \frac{\log \frac{I}{I_0}}{\log 10^{2/5}}$$

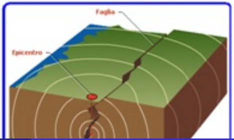
$$\boxed{m = -\frac{5}{2} \log \frac{I}{I_0}}$$

$m =$ differenza di magnitudo
$I =$ luminosità stella
$I_0 =$ luminosità di riferimento.

La scala Richter



La natura è... logaritmica?



La scala Richter

Terremoti catastrofici

data	stati coinvolti	vittime	magnitudo
26.12.2004	Indonesia, Sri Lanca, India, Thailandia, Birmania, Bangladesh, Maldive	> 230.000	9
28.3.2005	Sumatra	1.300	8.7
15.8.2007	Perù	519	7.9
12.9.2007	Indonesia	21	8.4
14.11.2007	Cile	2	7.7
12.5.2008	Cina, Pakistan, Thailandia, Vietnam	80.000	7.8
14.6.2008	Giappone	10	7.2

La scala Richter

$$E = 10^{44}10^{3/2R}$$

Magnitudo (R)	Energia sviluppata (E)
1	$E_1 = 10^{44}10^{3/2}$
2	$E_2 = 10^{44}10^{\frac{3}{2}2} = 10^{\frac{3}{2}}E_1$
3	$E_3 = 10^{44}10^{\frac{3}{2}3} = (10^{\frac{3}{2}})^2E_1$
.	.
.	.
n	$E_n = 10^{44}10^{\frac{3}{2}n} = (10^{\frac{3}{2}})^{n-1}E_1$
.	.
.	.
10	$E_{10} = 10^{44}10^{\frac{3}{2}10} = (10^{\frac{3}{2}})^9E_1$

$$\boxed{\frac{E_{i+1}}{E_i} = 10^{3/2} \cong 32}$$

Ordini di grandezza

Terremoti (natura logaritmica):

- $\dfrac{E_9}{E_{7.2}} = (10^{\frac{3}{2}})^{9-7,2} \cong 500$
- $\dfrac{E_{10}}{E_1} = 10^{\frac{27}{2}} \cong 10^{15}$

$[1, 10] \longrightarrow \left[0, 10^{15}\right]$

Udito (sensi logaritmici):

$[0, 200] \longrightarrow \left[10^{-12}, 10^{8}\right]$

Luminosità Stellare (sensi logaritmici):

$[-27, 32] \longrightarrow \left[10^{-13}, 10^{11}\right]$

Ordini di grandezza

Terremoti (natura logaritmica):

- $\dfrac{E_9}{E_{7.2}} = (10^{\frac{3}{2}})^{9-7,2} \cong 500$
- $\dfrac{E_{10}}{E_1} = 10^{\frac{27}{2}} \cong 10^{15}$

$[1, 10] \longrightarrow \left[0, 10^{15}\right]$

Udito (sensi logaritmici):

$[0, 200] \longrightarrow \left[10^{-12}, 10^{8}\right]$

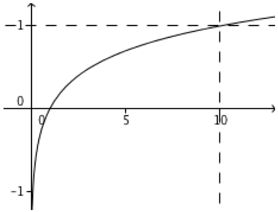
Luminosità Stellare (sensi logaritmici):

$[-27, 32] \longrightarrow \left[10^{-13}, 10^{11}\right]$

Come rappresentare questi dati?

Nota Teorica:

$$f(x) = \log x$$



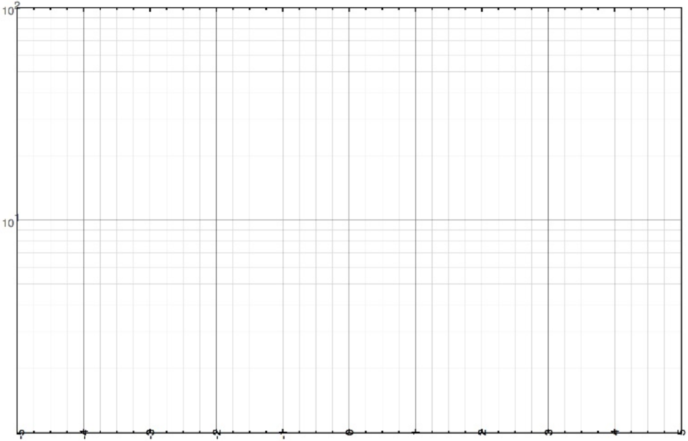
- DILATAZIONE della scala $\quad]0,1[\longrightarrow]-\infty, 0[$
  $\ldots 10^{-3}\ 10^{-2}\ 10^{-1} \Longrightarrow \ldots\ -3\ -2\ -1$
- CONTRAZIONE della scala $\quad [1,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$
  $1\ 10\ 10^2\ 10^3 \ldots \Longrightarrow 0\ 1\ 2\ 3 \ldots$

VANTAGGI:

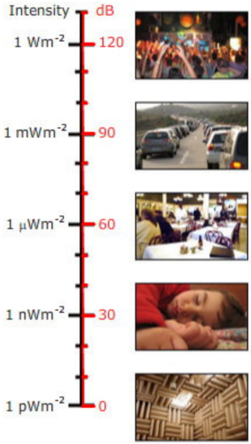
- consente di rappresentare agevolmente grandezze macroscopiche $\left[1, 10^{100}\right] \longrightarrow [0, 100]$
- consente di rappresentare agevolmente grandezza microscopiche $\left[100^{-100}, 0\right] \longrightarrow [-100, 0]$
- permette di semplificare alcune operazioni matematiche comuni: per moltiplicare due valori è sufficiente sommare i relativi valori in scala logaritmica, per dividerli è sufficiente sottrarre i valori in scala logaritmica.

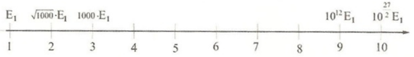
Rappresentazione di una scala logaritmica

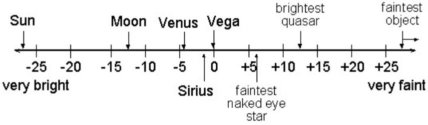
y	Log y
1	0,000
2	0,301
3	0,477
4	0,602
5	0,699
6	0,778
7	0,845
8	0,903
9	0,954
10	1,000
20	1,301
30	1,477
40	1,602
50	1,699
60	1,778
70	1,845
80	1,903
90	1,954
100	2,000



Rappresentazione di una scala logaritmica







Apparent brightnesses of some objects in the magnitude system.

Note Teoriche

$$y = f(x) = Ba^{kx}, \qquad 0 < a \neq 1,\ B > 0, k \in \mathbb{R}$$

Note Teoriche

$$y = f(x) = Ba^{kx}, \qquad 0 < a \neq 1,\ B > 0, k \in \mathbb{R}$$

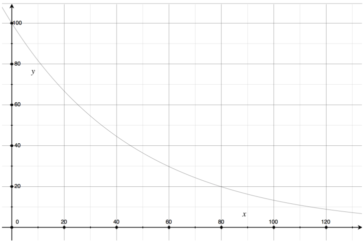
$$Y = \log y = \log B + (k \log a)x$$

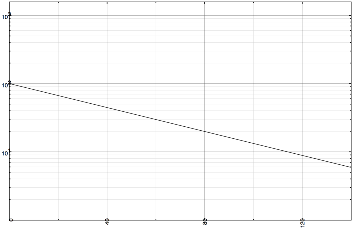
Piano Semilogaritmico

Note Teoriche

$$y = f(x) = Ba^{kx}, \qquad 0 < a \neq 1,\ B > 0, k \in \mathbb{R}$$

$$Y = \log y = \log B + (k \log a)x$$





Piano Semilogaritmico

Problema di Steve:

$$y = f(x) = 50(1,25)^x$$

Piano Semilogaritmico

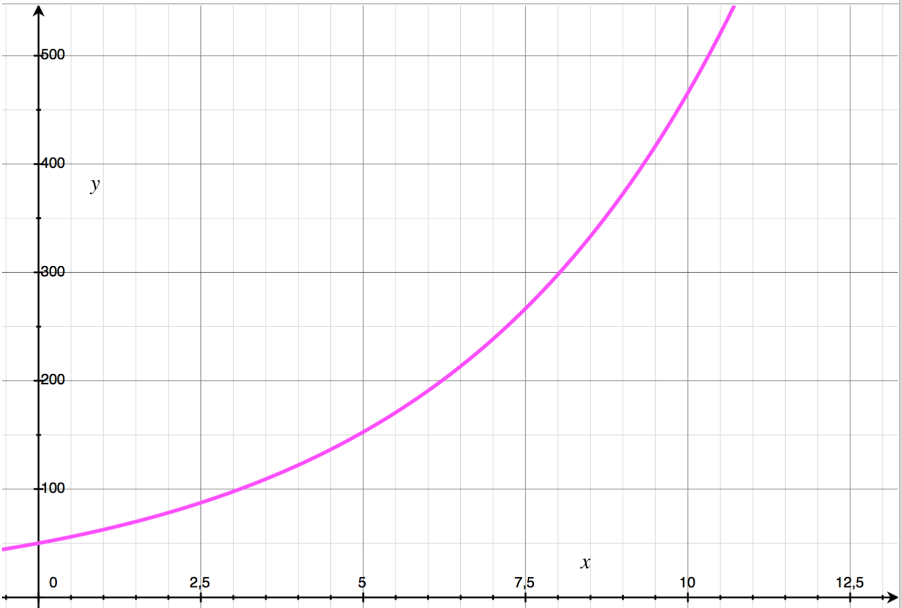
Problema di Steve:

$$y = f(x) = 50(1,25)^x$$

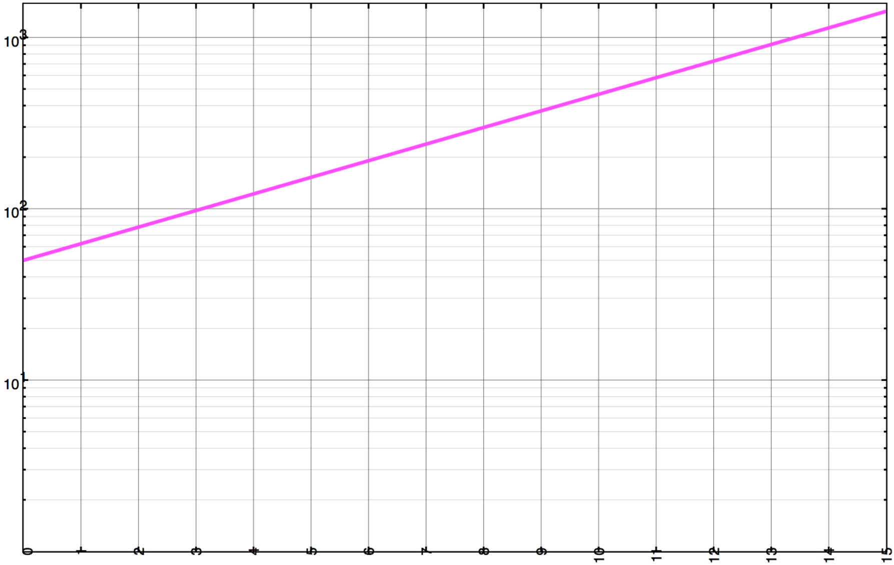
$$Y = \log y = \log 50 + (\log 1,25)x$$

$$Y = 0,09691x + 1,69897$$

Piano Semilogaritmico



Piano Semilogaritmo



Bibliografia

- P. Brandi, A. Salvadori, *Prima di iniziare, Perugia 2011.*
- *http://pls.dima.unige.it/pls0409/Logaritmo/Berto/index.htm*