UNITÀ D'APPRENDIMENTO

PROGRESSIONI GEOMETRICHE
E
FUNZIONI ESPONENZIALI

VALENTINA REGNO

Classe:	3° anno liceo scientifico.
Prerequisiti:	concetto di funzione, in particolare di funzione esponenziale.
Contenuti:	Progressioni geometriche; corrispondenza biunivoca tra progressioni geometriche e funzioni esponenziali.
Obiettivi:	acquisire il concetto di progressione geometrica a partire da situazioni reali; acquisire il legame tra progressioni geometriche e funzioni esponenziali.
Competenze:	saper risolvere, utilizzando gli strumenti matematici proposti, problematiche relative a situazioni reali.

I CHICCHI E LA SCACCHIERA

Secondo un'antica leggenda orientale, per aver inventato il gioco degli scacchi, tanto gradito al re di Persia, Sissa Nassir chiese la seguente ricompensa: un chicco di riso per la prima casella della scacchiera, due per la seconda, quattro per la terza e così via, raddoppiando la quantità dei chicchi per ognuna delle caselle. Il re accettò senza pensarci, ma dovette ricredersi ...

PERCHÉ?

Il numero dei chicchi di riso (N_k) raddoppia per ogni casella (k):

$$N_1 = 1$$

$$N_2 = 2 \cdot N_1 = 2$$

$$N_3 = 2 \cdot N_2 = 2^2 N_1 = 2^2 = 4$$

$$N_4 = 2 \cdot N_3 = 2^3 N_1 = 2^3 = 8$$

$$\vdots$$

$$N_k = 2 \cdot N_{k-1} = 2^{k-1} N_1 = 2^{k-1}$$

$$\vdots$$

$$N_{64} = 2 \cdot N_{63} = 2^{63} N_1 = 2^{63}$$

2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7
2^8	2^9	2^{10}	2^{11}	2^{12}	2^{13}	2^{14}	2^{15}
2^{16}	2^{17}	2^{18}	2^{19}	2^{20}	2^{21}	2^{22}	2^{23}
2^{24}	2^{25}	2^{26}	2^{27}	2^{28}	2^{29}	2^{30}	2^{31}
2^{32}	2^{33}	2^{34}	2^{35}	2^{36}	2^{37}	2^{38}	2^{39}
2^{40}	2^{41}	2^{42}	2^{43}	2^{44}	2^{45}	2^{46}	2^{47}
2^{48}	2^{49}	2^{50}	2^{51}	2^{52}	2^{53}	2^{54}	2^{55}
2^{56}	2^{57}	2^{58}	2^{59}	2^{60}	2^{61}	2^{62}	2^{63}

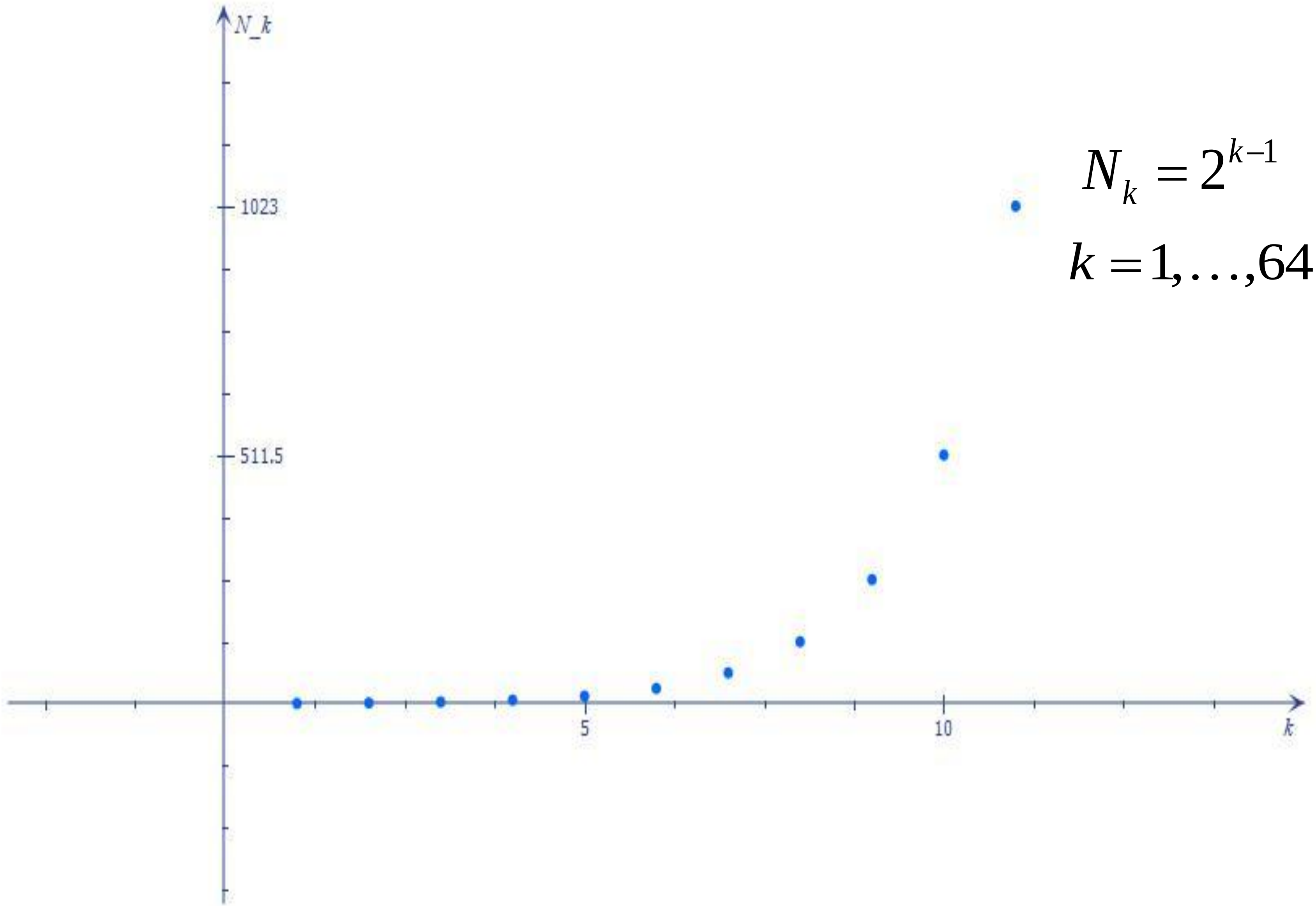
La sequenza

$$N_1 \quad N_2 \quad \ldots \quad N_k \quad \ldots \quad N_{64}$$

costituisce una *progressione geometrica finita* di ragione 2.

Il numero di chicchi di riso richiesti per la $k-$esima casella è pari alla potenza $(k-1)-$esima della ragione:

$$N_k = 2^{k-1} \qquad\qquad k = 1, \ldots, 64$$



$$N_k = 2^{k-1}$$

$$k = 1, \ldots, 64$$

In generale, una sequenza

$$A_0 \qquad A_1 \qquad A_2 \qquad \dots \qquad A_n$$

tale che $A_k = qA_{k-1}$ con $k = 1, 2, \dots, n$

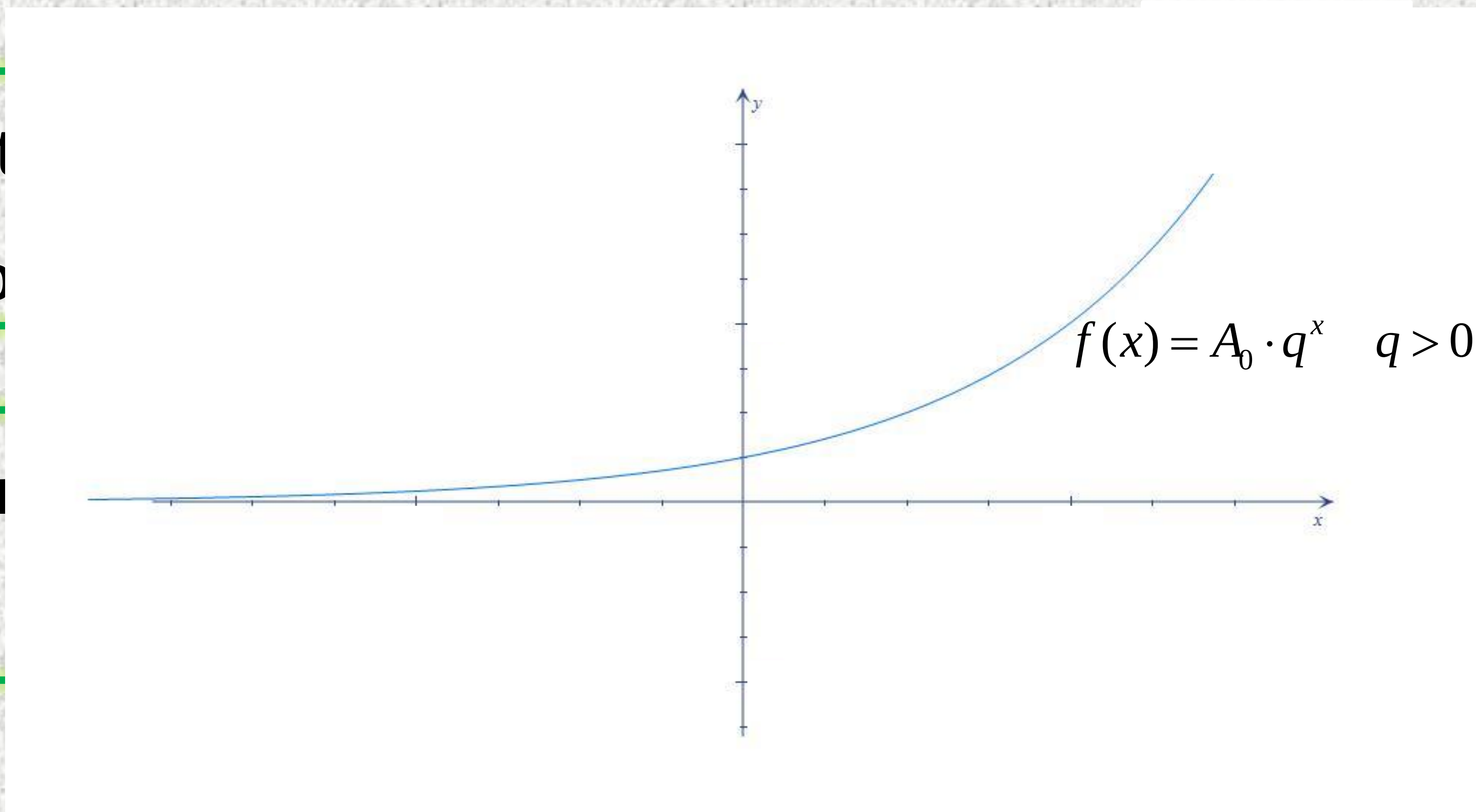
costituisce una progressione geometrica di ragione q.

Il termine generale della progressione è dato dalla *formula chiusa:*

$$A_k = q^k \cdot A_0 \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

Il t ... alla

po ...



Il r ... za

k ...

Viceversa, assegnata una funzione esponenziale:

$$f(x) = A \cdot a^x \qquad \text{con} \quad a > 0$$

le ordinate:

$$A \quad Aa \quad Aa^2 \quad \ldots \quad Aa^n$$

formano una progressione geometrica di ragione a
e primo termine A.

Questa corrispondenza biunivoca porta ad identificare le progressioni geometriche a rapporto costante (positivo) con le funzioni esponenziali (aventi base positiva):

il primo termine è l'ordinata della funzione per $x = 0$,

mentre la ragione è la base a dell'esponenziale.

Quanti chicchi di riso dovrà ricevere l'inventore degli scacchi?

In generale

$$S_{64} = N_1 + N_2 + \ldots + N_{64}$$

$$S_n = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$$

Per rendersi conto dell'enormità di questo numero … chicchi per ogni centimetro quadrato!

La quantità di riso era così grande … tagliare la testa.

$$S_n = A_1 + A_1 \cdot q + A_1 \cdot q^2 + \ldots + A_1 \cdot q^{n-1}$$

$$S_n = A_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$S_{64} = 2^{64} - 1$$

$$S_{64} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$$

$$S_n \cdot q - S_n = \cancel{A_1 \cdot q} + \cancel{A_1 \cdot q^2} + \ldots + \cancel{A_1 \cdot q^{n-1}} + A_1 \cdot q^n +$$

$$- A_1 - \cancel{A_1 \cdot q} - \cancel{A_1 \cdot q^2} - \ldots - \cancel{A_1 \cdot q^{n-1}}$$

LA RETE DI SANT'ANTONIO

Marco ti invia una lettera coinvolgendoti in una catena di Sant'Antonio. Queste sono le istruzioni:

- spedire 10 euro ad ogni ragazzo che compare nella lista seguente:

  1. Luca 2. Marta 3. Alex 4. Lucia 5. Marco

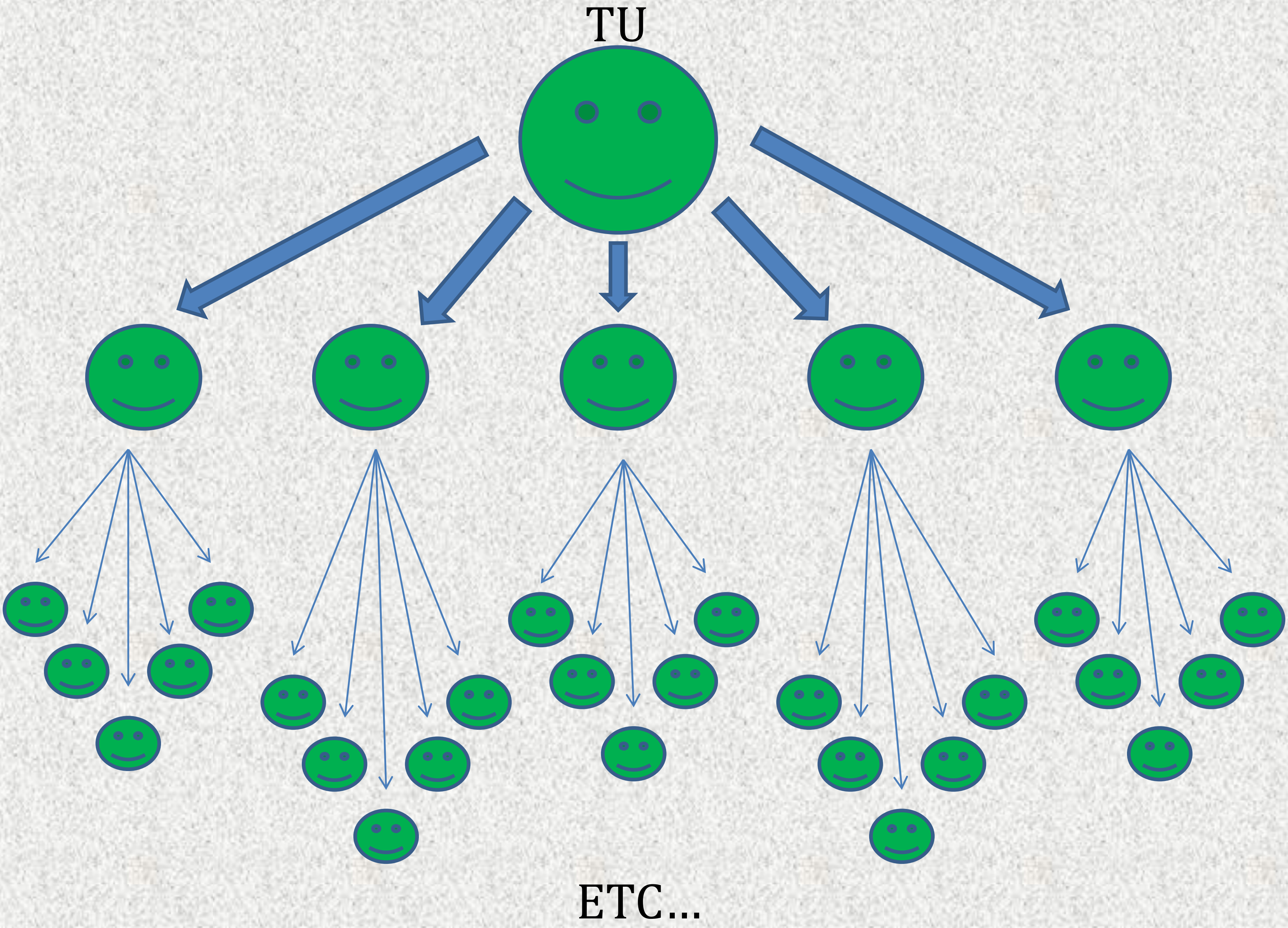
- cancellare il primo nome e aggiungere il tuo in fondo alla lista:

  1. Marta 2. Alex 3. Lucia 4. Marco 5. Il tuo nome

- fotocopiare la lettera e spedirla a cinque tuoi amici.

Ora non ti resta che aspettare: come tu hai spedito 10 euro alle persone in lista, così inizieranno ad arrivarne a te. In poco tempo rientreranno i tuoi 50 euro e ne riceverai molti di più!

QUANTI?


TU
ETC…

Al primo invio delle lettere coinvolgo 5 persone:

$$P_1 = 5$$

Al secondo invio sono coinvolte 25 persone:

$$P_2 = 5 \cdot P_1 = 5^2$$

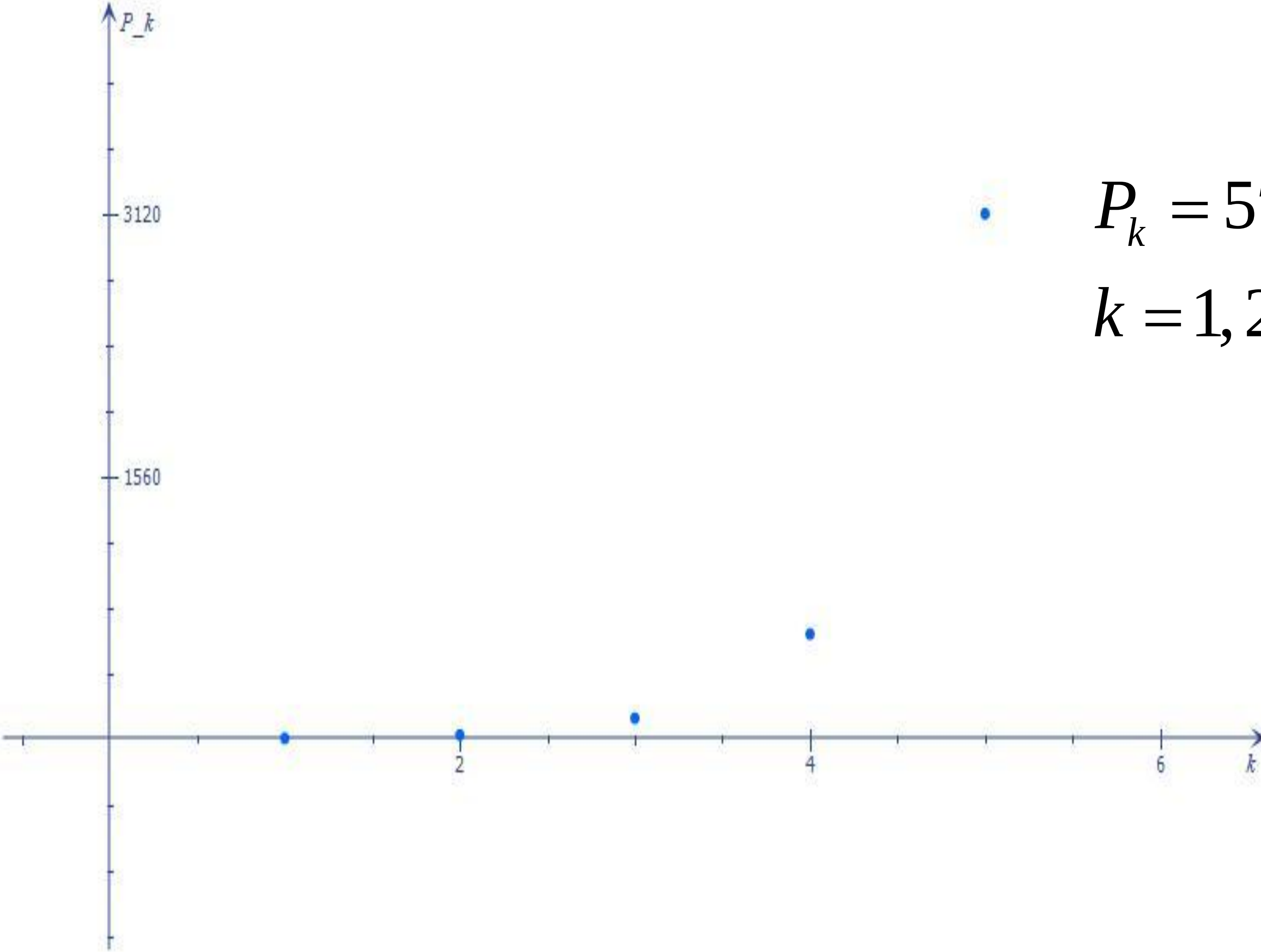
Al $k -$ esimo invio sono coinvolte 5^k persone:

$$P_k = 5 \cdot P_{k-1} = 5^k$$

La sequenza

$$P_1 \quad P_2 \quad \ldots \quad P_k \quad \ldots$$

costituisce una *progressione geometrica* di ragione 5.



$$P_k = 5^k$$

$$k = 1, 2, \ldots$$

Riceverai del denaro finché IL TUO NOME sarà presente nelle lettere, cioè fino al quinto invio.

QUANTI EURO RICEVERAI IN TUTTO?

$$D_5 = (P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5) \cdot 10\ €$$

$$= S_5 \cdot 10€$$

$$= \frac{5}{4}(5^5 - 1) \cdot 10€$$

$$= 39050\ €$$

In realtà le cose non stanno così ...

PERCHÉ?

Il quindicesimo invio coinvolge P_{15} persone:

$$P_{15} = 5^{15} = 30\,517\,578\,125$$

circa cinque volte l'attuale numero di abitanti della Terra!

Per cui P_{10} persone non riceveranno nulla!

In soli nove passi si esaurisce la possibilità concreta di ricevere soldi.