Dipartimento di Matematica e Informatica
Università degli Studi di Perugia
via Vanvitelli, 1 06123 Perugia

TFA – Tirocinio Formativo Attivo
A.A. 2011/2012

Classe A049 (Matematica e Fisica)

"Unità di Apprendimento:
La trigonometria nella realtà"

Paolo Luzi

Esame di Laboratorio di Didattica della Matematica

Prof. Brandi

Prerequisiti

- Funzioni goniometriche (seno, coseno, tangente);
- Relazioni fondamentali della goniometria;
- Formule di addizione, sottrazione, duplicazione;
- Nozioni di geometria euclidea.

Contenuti

- Relazioni fra lati e angoli di un triangolo rettangolo;
- Teorema dei seni;
- Teorema di Carnot (o del coseno).

Abilità

- Saper utilizzare la trigonometria in semplici problemi nell ambito di altri settori disciplinari.

Competenze

- Utilizzare i concetti e i modelli delle scienze sperimentali per investigare fenomeni sociali e naturali e per interpretare i dati.

Contesto scolastico

- Classe IV liceo scientifico indirizzo ordinario.

Metodologie didattiche

- Lezione frontale/dialogata;
- Lavori di gruppo.

Introduzione

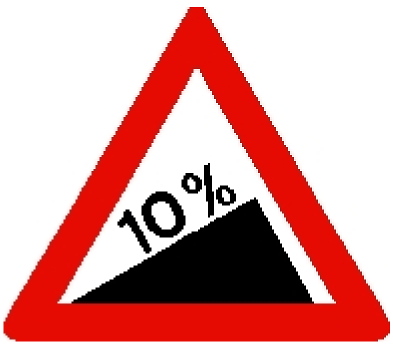
In questa unità di apprendimento verranno innanzitutto richiamate le relazioni che legano lati e angoli di un triangolo rettangolo; successivamente verranno enunciati il teorema dei seni e il teorema di Carnot (o del coseno). Il tutto sarà presentato partendo da delle situazioni e problematiche reali.
Di solito ciò viene affrontato enunciando dapprima i teoremi e successivamente si affronta la risoluzione di tanti esercizi e problemi; purtroppo la maggior parte di questi ultimi non fa riferimento ad alcuna situazione reale.
Di conseguenza gli studenti non apprezzano questa parte della matematica, la affrontano senza

motivazione e soprattutto non riescono a capire la potenza e l'utilità di questi strumenti matematici per la descrizione e la risoluzione anche di semplici problemi quotidiani.
Questo argomento può essere quindi utilizzato per far vedere finalmente agli studenti che tutte quelle formule e quelle nozioni di goniometria che hanno dovuto faticosamente capire e studiare possono essere applicate per risolvere una serie di problemi molto pratici e vicini alla realtà.
Ritengo che dedicare tempo alla risoluzione di problemi reali, anche con discussioni in classe, sia proficuo soprattutto per far avvicinare i ragazzi a questa parte della matematica, troppo spesso presentata solo in modo rigoroso e astratto.

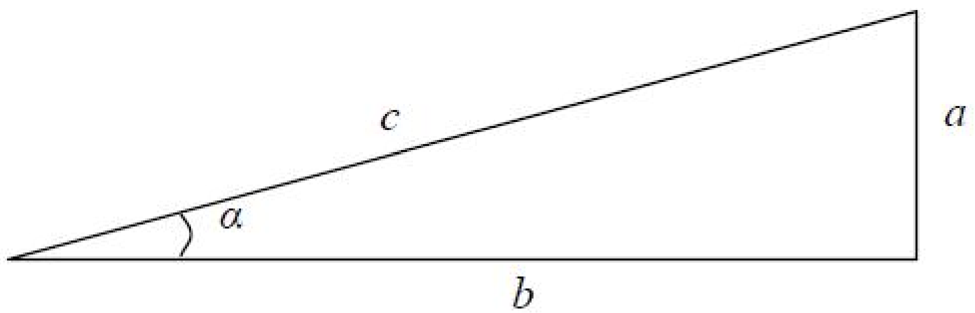
Lezione

- **La trigonometria per strada: pendenza topografica e pendenza stradale.**

Il termine pendenza è usato per indicare il grado di ripidità o di inclinazione di una strada o di un tratto di percorso.
La pendenza di una strada è indicata dalla segnaletica verticale con cartelli di pericolo che indicano la pendenza con una percentuale.
Ma che cosa vuol dire?



Schematizziamo la situazione:



La **pendenza topografica** $\boldsymbol{p_T}$ è, per definizione, il rapporto tra il dislivello *a* e la distanza orizzontale *b* tra due punti:

$$p_T = \frac{a}{b} \quad \left(p_T\% = 100 \cdot \frac{a}{b}\right)$$

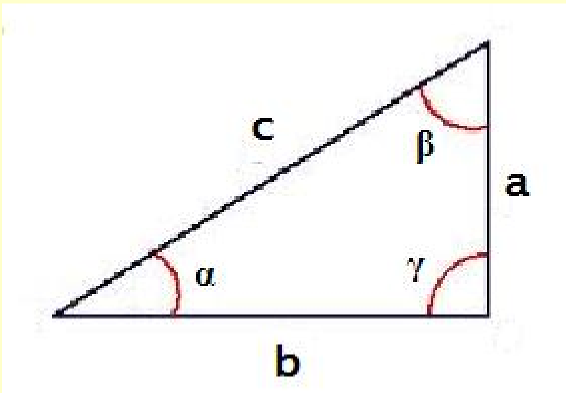
Il contachilometri di un'auto indica però la distanza effettivamente percorsa, cioè la distanza inclinata c.
Per questo si definisce anche la **pendenza stradale p_S** come il rapporto tra a e c:

$$p_S = \frac{a}{c} \quad \left(p_S\% = 100 \cdot \frac{a}{c}\right)$$

Determineremo p_T e p_S in funzione dell'angolo α di inclinazione della strada.

Richiami di trigonometria: relazioni fra lati e angoli di un triangolo rettangolo

Dato un qualsiasi triangolo rettangolo



valgono le seguenti relazioni:

$$a = c \sin\alpha = c\cos\beta,$$

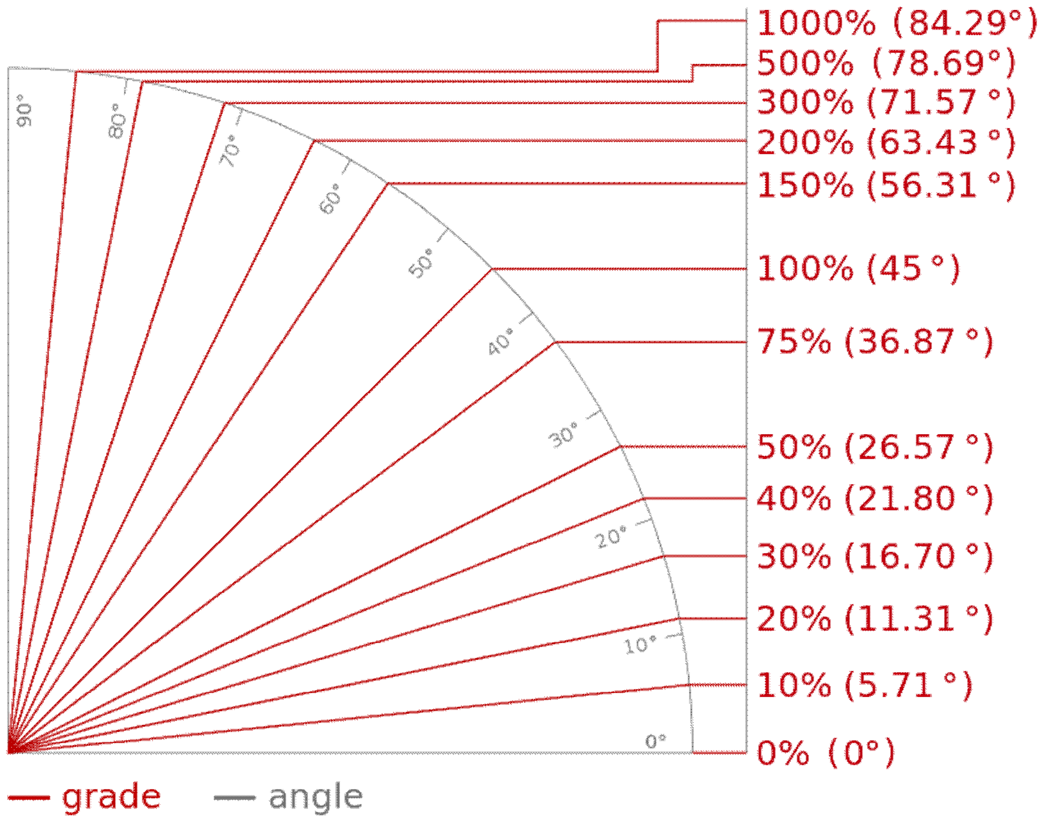
$$b = c\sin\beta = c\cos\alpha,$$

da cui segue

$$\frac{a}{b} = \tan\alpha = \frac{1}{\tan\beta}.$$

Allora la pendenza topografica p_T, per le proprietà del triangolo rettangolo appena richiamate, è

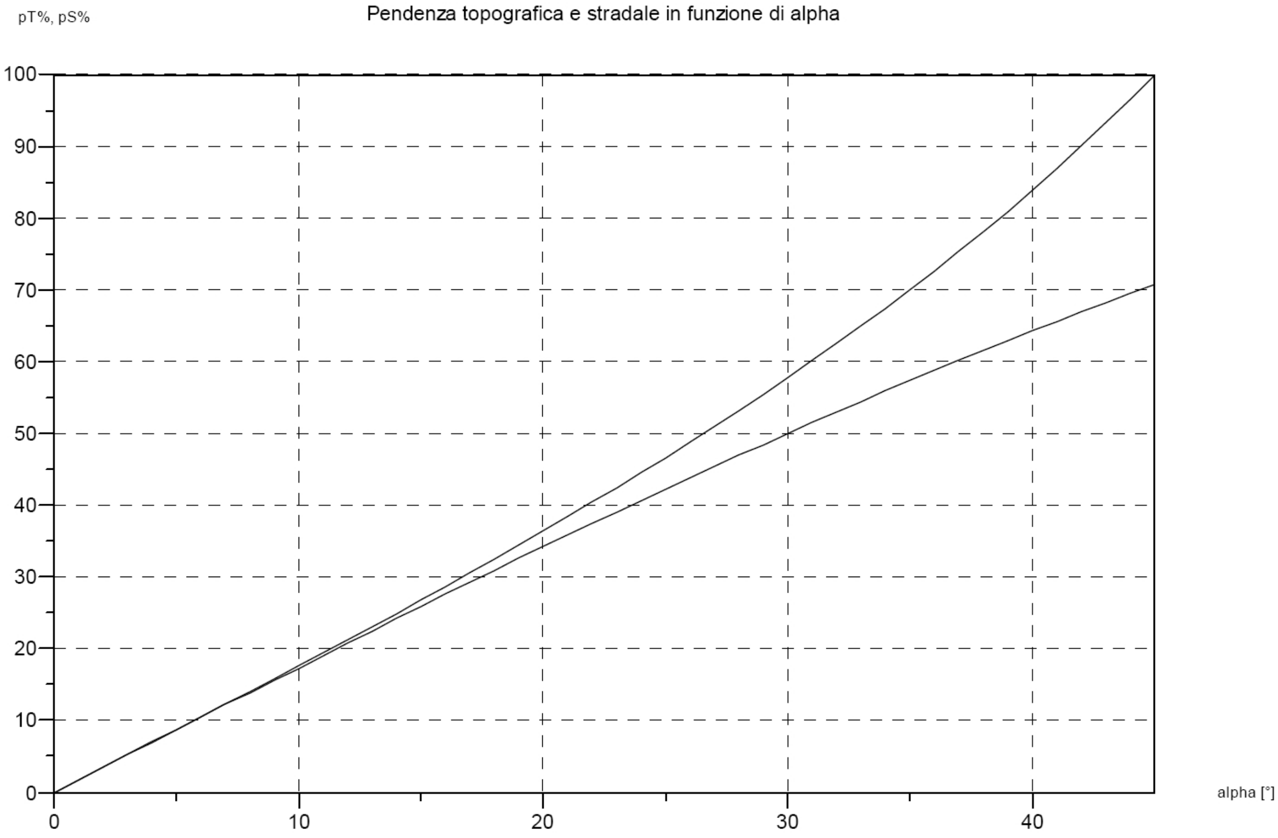
$$p_T = \tan\alpha \quad (p_T\% = 100 \cdot \tan\alpha)$$



La pendenza stradale p_S è invece il seno dello stesso angolo,

$$p_S = \sin \alpha \quad (p_S\% = 100 \cdot \sin \alpha)$$

Nella figura che segue sono riportati gli andamenti di $p_T\%$ e $p_S\%$ in funzione dell'angolo α da 0° a 45°.



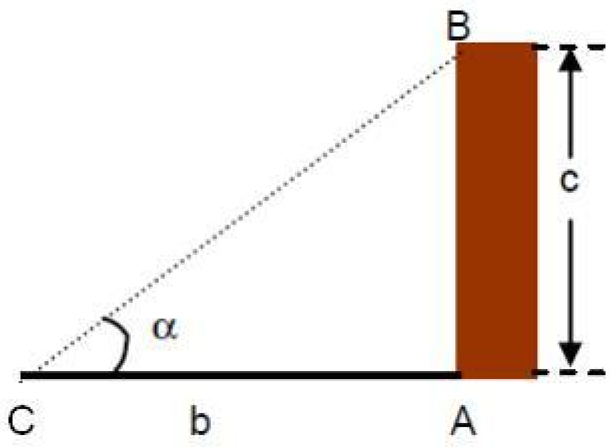
Sui cartelli stradali di pericolo è indicata la pendenza p_S e non la p_T, in modo che l'automobilista, se ad esempio legge una pendenza del 10%, sa che ogni 1000 m percorsi è salito di 100 m.
Si osservi anche come, per le pendenze tipicamente in gioco in Italia, non ci sia grossa differenza tra pendenza topografica e pendenza stradale.
Nella seguente tabella sono mostrati i valori della pendenza topografica percentuale $p_T\%$, della pendenza stradale percentuale $p_S\%$ e l'errore commesso nell'approssimare $p_T\%$ con $p_S\%$.

θ	$p_T\%$	$p_S\%$	Errore commesso
0,57°	1%	0,99995%	0,005%
1,15°	2%	1,9996%	0,02%
1,72°	3%	2,9987%	0,043%
2,86°	5%	4,9938%	0,124%
5,7°	10%	9,950%	0,5%
8,5°	15%	14,83%	1,13%

11,3°	20%	19,61%	1,95%
14,0°	25%	24,25%	3%
16,7°	30%	28,7%	4,33%
21,8°	40%	37,1%	7,25%
26,6°	50%	44,7%	10,6%
45°	100%	70,7%	29,3%
63,4°	200%	89,4%	55,3%
90°	∞	100%	100%

Poiché le strade molto raramente presentano pendenze superiori al 20%, l'errore commesso nell'approssimare $p_T\%$ con $p_S\%$ è minore del 2% (e minore dello 0,5% per pendenze inferiori al 10%), quindi agli effetti pratici si può approssimare $p_T\%$ a $p_S\%$.

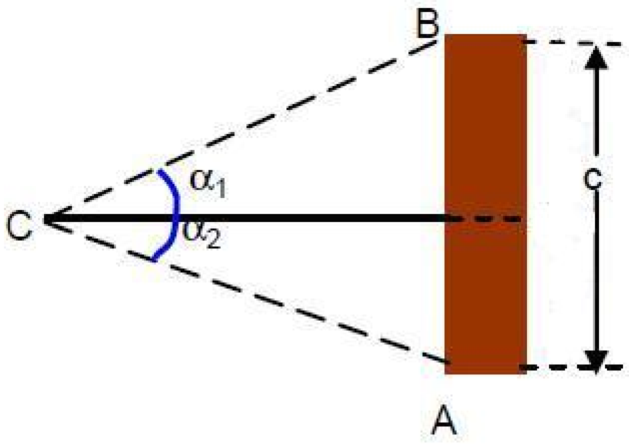
- **Altezza di una torre il cui piede si trovi sul piano dell'osservatore e sia accessibile**



La soluzione è immediata: essendo (in questo caso) la base della torre accessibile, misuriamo sul terreno a partire da A un segmento $\overline{AC}$ e misuriamo l'angolo α.
Chiaramente l'altezza della torre è

$$\overline{AB} = \overline{AC} \tan \alpha.$$

- **Altezza di una torre il cui piede si trovi ad una quota più bassa rispetto a quella dell'osservatore e sia accessibile**

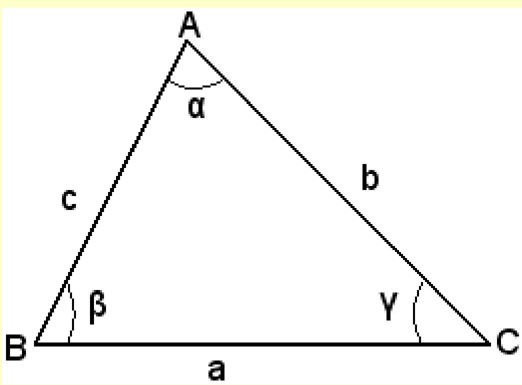


Siccome la base della torre è accessibile, è possibile misurare la distanza $\overline{AC}$; si misurano inoltre gli angoli α_1 e α_2 (α_2 è detto *angolo di depressione* di A rispetto a C).

Qui ci viene in aiuto un'ulteriore risultato valido in generale.

Teorema dei seni

In un triangolo qualunque i lati sono proporzionali ai seni degli angoli opposti e quindi è costante il rapporto tra ciascun lato e il seno dell'angolo opposto.



$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

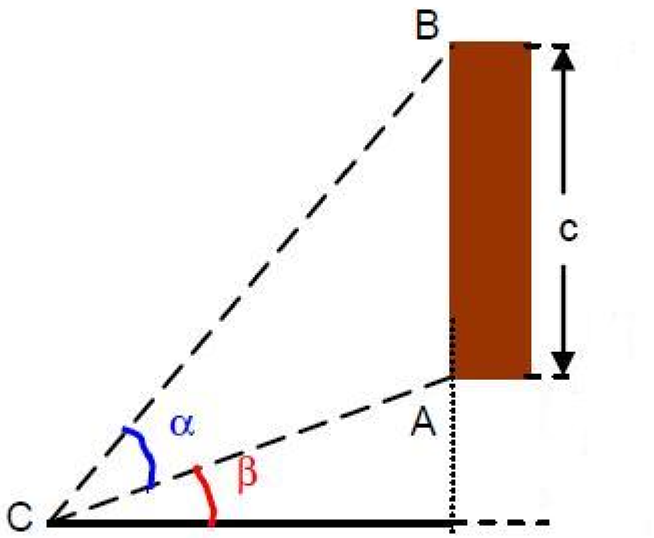
Consideriamo allora il triangolo $\widehat{ABC}$ (della figura in cui è rappresentata la torre); dal teorema dei seni si ha che

$$\frac{\overline{AC}}{\sin(90° - \alpha_1)} = \frac{\overline{AB}}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)},$$

quindi l'altezza della torre si può calcolare

$$\overline{AB} = \overline{AC}\frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{\cos\alpha_1}.$$

- **Altezza di una torre il cui piede si trovi ad una quota più alta rispetto a quella dell'osservatore e sia accessibile**



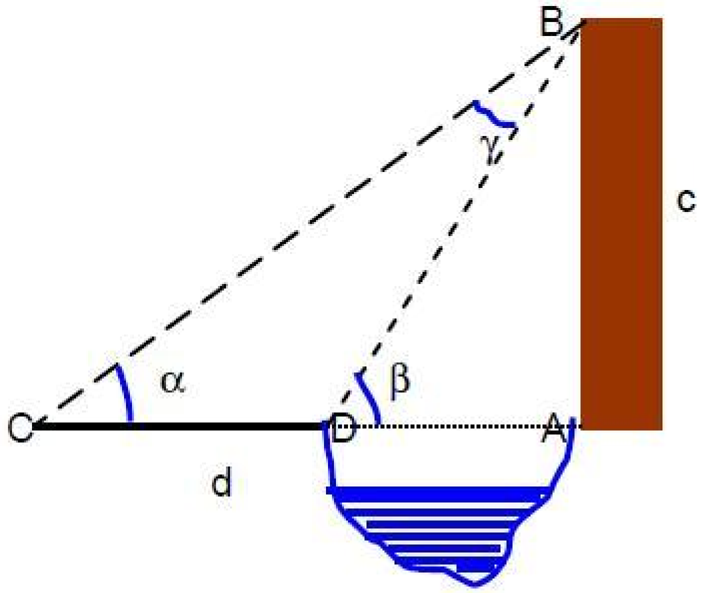
La base della torre è accessibile, quindi è possibile misurare la distanza $\overline{AC}$; si misurano inoltre gli angoli α e β (β è detto *angolo di elevazione* di A rispetto a C).
Consideriamo il triangolo $\widehat{ABC}$; dal teorema dei seni si ha che

$$\frac{\overline{AC}}{\sin(90° - (\alpha + \beta))} = \frac{\overline{AB}}{\sin\alpha},$$

quindi l'altezza della torre si può calcolare

$$\overline{AB} = \overline{AC}\frac{\sin\alpha}{\cos(\alpha + \beta)}.$$

- **Altezza di una torre il cui piede si trovi sul piano dell'osservatore ma non sia accessibile**



Supponiamo di non poter raggiungere la base della torre perché c'è un fossato pieno d'acqua; consideriamo allora D, il punto più vicino alla torre che è possibile raggiungere e mi sposto, allontanandomi dalla torre, fino ad un certo punto C.
Sarà quindi possibile misurare la distanza $\overline{CD}$ e gli angoli α e β; chiaramente l'angolo

$$C\hat{D}B = 180° - \beta$$

e l'angolo

$$\gamma = 180° - (180° - \beta) - \alpha = \beta - \alpha.$$

Grazie al teorema dei seni riesco a calcolare $\overline{DB}$:

$$\frac{\overline{CD}}{\sin(\beta - \alpha)} = \frac{\overline{DB}}{\sin \alpha},$$

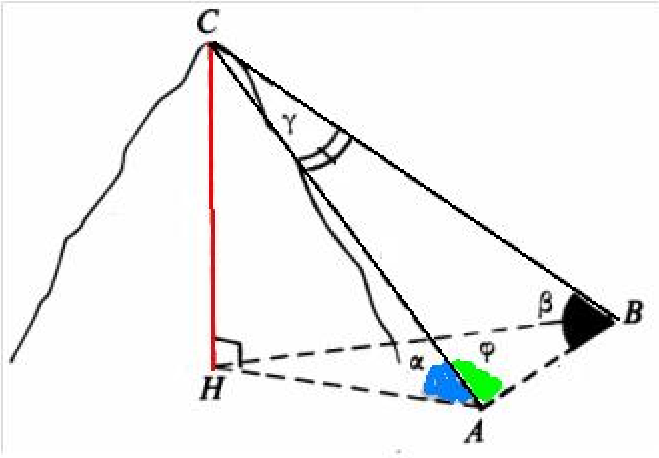
da cui segue che

$$\overline{DB} = \overline{CD}\,\frac{\sin \alpha}{\sin(\beta - \alpha)}.$$

Considerando ora il triangolo $D\hat{A}B$ posso trovare $\overline{AB}$, ossia l'altezza della torre:

$$\overline{AB} = \overline{DB}\sin\beta = \overline{CD}\cdot\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)}.$$

- ## **Altezza di una montagna**



Vogliamo determinare l'altezza CH di una montagna; misuriamo sul terreno orizzontale la distanza tra due punti A e B, accessibili all'osservatore. Inoltre misuriamo gli angoli α, β e φ.
Possiamo applicare il teorema dei seni al triangolo ABC:

$$\frac{\overline{AC}}{\sin\beta} = \frac{\overline{AB}}{\sin\gamma};$$

dal fatto che $\sin\gamma = \sin\left(180° - (\beta + \varphi)\right) = \sin(\beta + \varphi)$, si ha che

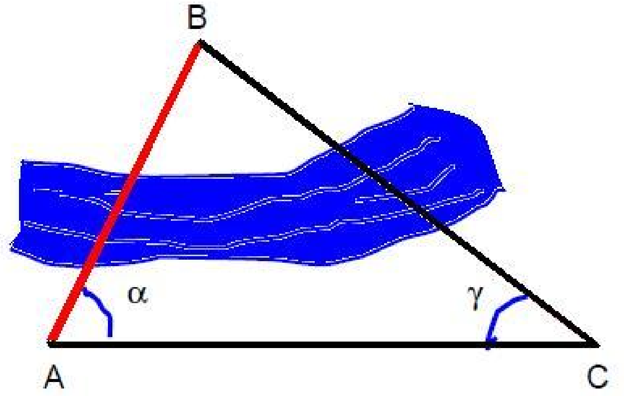
$$\overline{AC} = \overline{AB} \cdot \frac{\sin\beta}{\sin(\beta + \varphi)}.$$

Siccome poi il triangolo ACH è rettangolo, $\overline{CH} = \overline{AC}\sin\alpha$, quindi

$$\overline{CH} = \overline{AB} \cdot \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin(\beta + \varphi)}.$$

Osserviamo che rispetto al caso precedente qui non è necessario che i punti A e B siano allineati col punto H.
Tuttavia l'osservatore deve effettuare quattro misure invece che tre.

- **Distanza tra due punti visibili ma solo uno è accessibile**



Supponiamo di voler calcolare la distanza fra due punti A e B visibili: io mi trovo in A ma non posso raggiungere B perché è al di là del fiume.
Posso spostarmi in un punto C (visibile da A) e misurare AC, α e γ.
Applicando il teorema dei seni si avrà

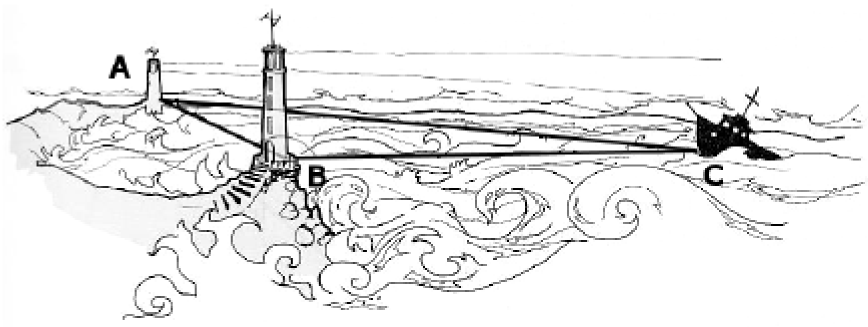
$$\frac{\overline{AB}}{\sin\gamma} = \frac{\overline{AC}}{\sin(180° - (\alpha+\gamma))},$$

da cui segue che

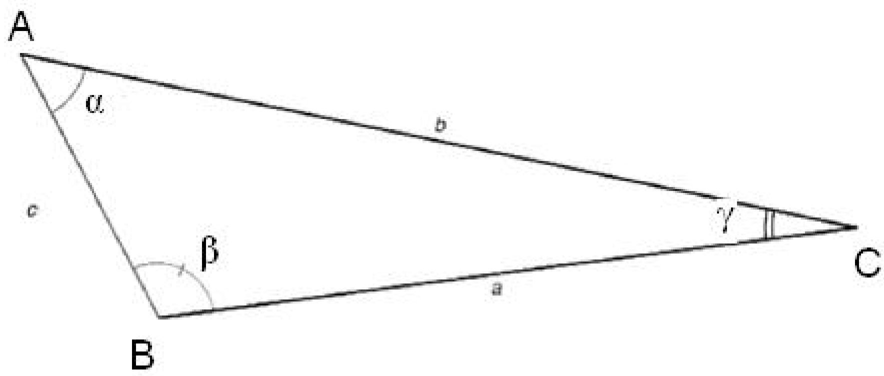
$$\overline{AB} = \frac{\overline{AC}\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}.$$

***ESEMPIO*: Radiogoniometro**

Il radiogoniometro è uno strumento molto utile nella navigazione marittima e viene usato per determinare la direzione da cui proviene un segnale radio.
Ad esempio, nel caso in cui accada che una nave C si trovi in difficoltà, essa invia un segnale radio omnidirezionale; il segnale viene ricevuto da due capitanerie di porto, A e B, che distano tra loro un certo numero di km in linea d'aria.

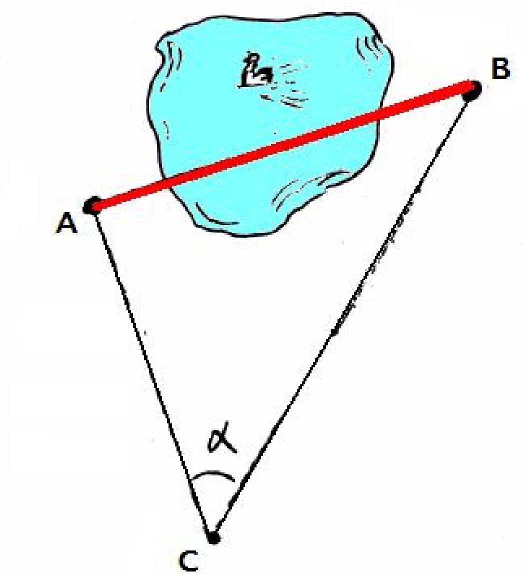


Con il radiogoniometro le due capitanerie rilevano gli angoli α e β indicanti le direzioni d'arrivo del segnale.



Problema: quanto dista la nave C da A e da B?

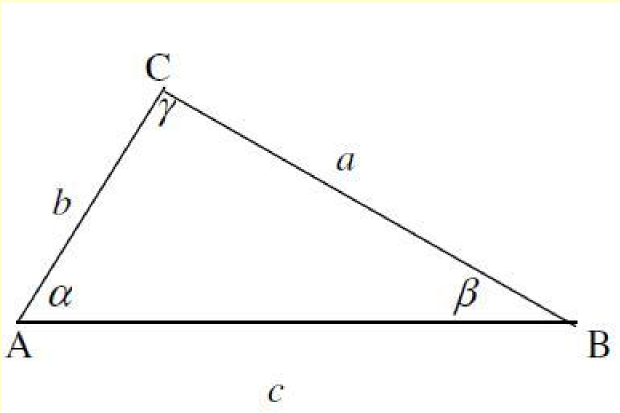
- **Distanza tra due punti separati da un ostacolo ma entrambi accessibili**



Si vuole calcolare la distanza fra due punti A e B separati da un ostacolo, per esempio un lago. Fissiamo un punto C in modo tale che i due punti siano visibili, misuriamo le distanze $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ e l'angolo α.
Per risolvere questo problema ci viene in aiuto il seguente risultato:

Teorema di Carnot (o del coseno)

In un triangolo qualunque, il quadrato della misura di un lato è uguale alla somma dei quadrati delle misure degli altri due lati diminuita del doppio del prodotto di queste per il coseno dell'angolo opposto al lato che si calcola.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

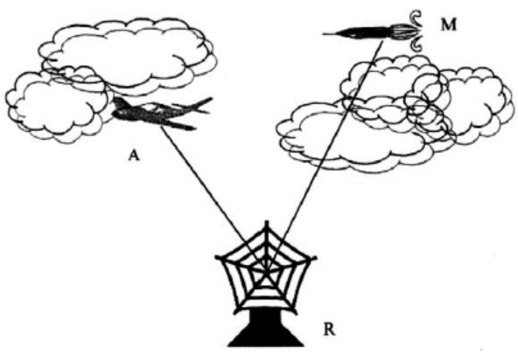
$$b^2 = a + c^2 - 2ac\cos\beta,$$

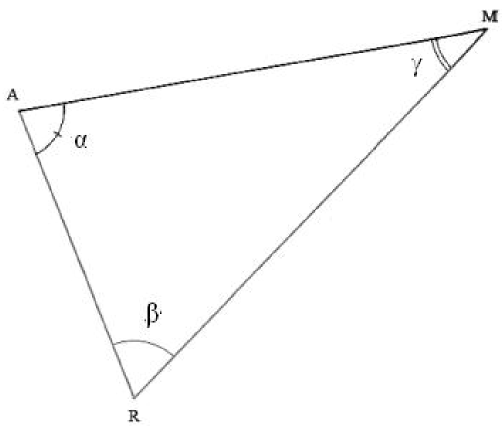
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

La soluzione si ottiene semplicemente applicando questo importante risultato:

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AC}\ \overline{BC}\cos\alpha}$$

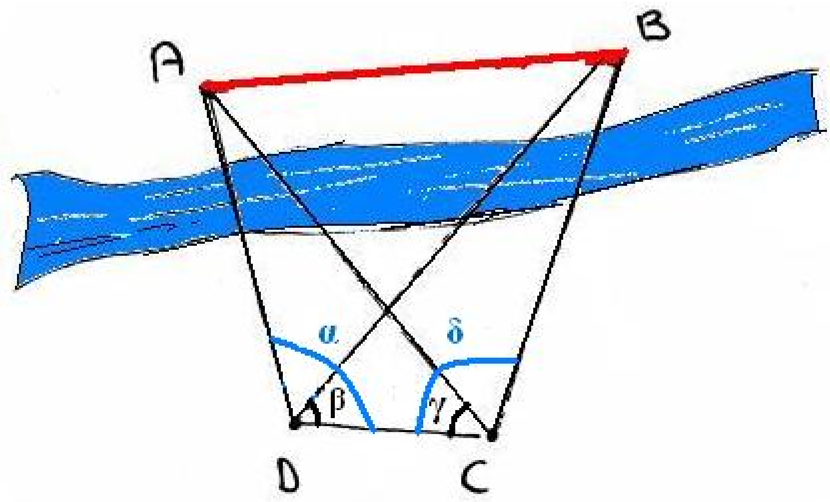
***ESEMPIO*: Guida radar di un missile.**





Nella guida radar di un missile antiaereo, la stazione radar da terra (R) deve valutare in ogni istante la distanza tra l'aereo (A) da colpire e il missile (M), nonché l'angolo di rotta γ che il missile deve tenere per raggiungere il bersaglio A.
Il radar misura la distanza *RA* radar–aereo, quella *RM* radar–missile e l'angolo β tra queste due direzioni.
Per determinare *AM* si applica il teorema di Carnot; una volta nota *AM* si può applicare il teorema dei seni per determinare γ.

- **Distanza tra due punti visibili ma entrambi inaccessibili (Problema di Hansen)**



Vediamo ora come è possibile determinare la distanza fra due punti A e B entrambi inaccessibili (perché per esempio si trovano al di là di un fiume).
Come nel problema precedente, spostandoci da C a D possiamo considerare il triangolo $\widehat{DCA}$; siccome siamo in grado di misurare $\overline{CD}$, misurando gli angoli α e γ possiamo affermare che

$$\frac{\overline{AC}}{\sin\alpha} = \frac{\overline{CD}}{\sin(\alpha+\gamma)}.$$

Considerando il triangolo $\widehat{DCB}$, possiamo affermare che

$$\frac{\overline{BC}}{\sin\beta} = \frac{\overline{CD}}{\sin(\beta+\delta)}.$$

Di conseguenza,

$$\overline{AC} = \frac{\overline{CD}\sin\alpha}{\sin(\alpha+\gamma)} \qquad \text{e} \qquad \overline{BC} = \frac{\overline{CD}\sin\beta}{\sin(\beta+\delta)}.$$

Ora, del triangolo $\widehat{ACB}$ si conosce la misura dei lati $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ e dell'angolo compreso $\delta-\gamma$; applicando il teorema di Carnot si misura la distanza fra A e B.

Bibliografia e sitografia

- http://www.fe.infn.it/u/mandreot/SSIS/UnitaDidattiche/Matematica/DissertazioneTrigonometriaMazzoni.pdf
- http://www.liceisgv.it/docenti/baldi/TrigonometriaApplicata.pdf
- http://2.228.124.220/html/trigonometria/homepage.htm
- http://matematicaefisica.weebly.com/uploads/6/6/3/3/6633732/trigonometria_20110525.pdf
- N. Dodero, P. Baroncini, R. Manfredi, Lineamenti di Matematica 4°, Indirizzi classico – linguistico – sociale e pedagogico, Ghisetti e Corvi Editori.