SCALE LOGARITMICHE

Massimo Albertini

Introduzione

I logaritmi trovano un interessante campo di applicazione nelle scale di misura. Quando si realizza un disegno tecnico su carta o su uno schermo di un computer dove abbiamo bisogno di un'alta risoluzione, occorre tener conto della scala più fine che possiamo apprezzare . Per es. su un foglio in formato A0 ($84cm \times 118cm$), se prendiamo una unità di misura u pari ad $1m$ possiamo graduare la scala dividendola in 10 parti, tracciando la decima parte di u e poi dividendola altre due volte in dieci parti ottenendo una distanza di $1mm$ tra due tacche successive. Facendo lo stesso con l'altra dimensione otteniamo una carta millimetrata.

Quindi osserviamo che su un foglio di carta possiamo rappresentare, con una scala lineare, quantità che differiscono per non più di 3 ordini di grandezza. Anche su un monitor la risoluzione ottenibile normalmente non è molto superiore, essendo la distanza tra due pixel non meno di $1mm$ circa . Poichè l'occhio umano non è in grado di apprezzare le frazioni di mm, questo è quanto di meglio si può fare.
Come facciamo allora a rappresentare delle grandezze il cui campo di variazione copre numerosi ordini di grandezza?

Esempi

Esempio n.1: il pH

Il simbolo pH si usa in chimica per indicare la maggiore o minore acidità delle soluzioni acquose. L'acidità può essere espressa attraverso la concentrazione degli ioni H^+ presenti in soluzione. Questi ioni, normalmente, sono in quantità molto piccola e vengono indicati, usando le parentesi quadre per simboleggiare le concentrazioni molari, attraverso espressioni del tipo $[H^+] = 10^{-4} mol/L$, che significa che in un litro di acqua vi è un decimillesimo di mole di ioni H^+. Si vede che questa grandezza varia tra 10^{-14} e 10^0, cioè per ben 15 ordini di grandezza.

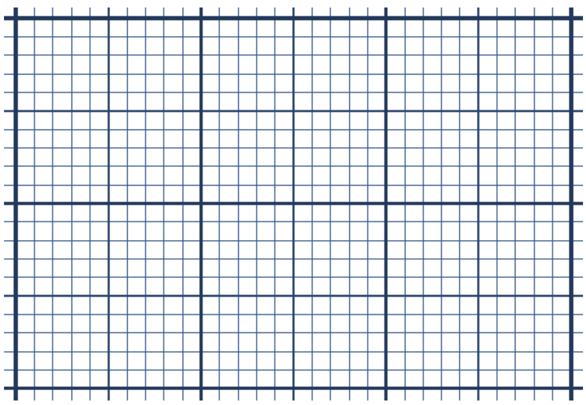

Figure 0.1.

$[H^+]$	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}	10^{-10}	10^{-11}	10^{-12}	10^{-13}	10^{-14}
pH	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	ACIDITA'								BASICITA'						
Indicatore universale di pH															

FIGURE 0.2.

Non si potrebbe rappresentare tale grandezza su una scala lineare; oltretutto i valori con esponenti negativi si concentrerebbero nelle vicinanze dello zero e sarebbero indistinguibili tra loro. Per rappresentare grandezze di questo tipo occorrerebbe operare una trasformazione che dilati l'intervallo unitario in un intervallo milioni di volte, conservando l'ordinamento. E' chiaro che ciò che più conta in questi valori è l'ordine di grandezza, cioè l'esponente di 10. Questo esponente, cambiato di segno, è appunto il pH, dove p sta per potenza ed H sta per ione idrogeno. Il pH viene definito così come l'opposto del logaritmo, in base 10, della concentrazione molare degli ioni idrogeno: $pH = -\log_{10}[H^+]$. La concentrazione suddetta permette di definire il grado di acidità o basicità della soluzione. Una soluzione si dice acida se il suo pH è tra 0 e 6, neutra se il pH è 7 e basica se è tra 8 e 14.

Esempio n. 2: la scala Richter

Per misurare la quantità di energia liberata durante i terremoti si utilizza un indice chiamato *magnitudo* che valuta tale energia in confronto a quella di una scossa campione a cui viene attribuito il valore 1 di magnitudo . Seguendo la scala Richter, l'energia liberata al variare della magnitudo , si ha che ad ogni due gradi di magnitudine l'energia aumenta di un fattore 1000; in altri termini ad ogni grado in più della scala l'energia aumenta di un fattore $10^{3/2}$, cioè di circa 32 volte. L'energia liberata dunque, poichè la scala Richter comprende 10 gradi di magnitudine, varia tra 15 ordini di grandezza . Se indichiamo con $M_1, M_{2,} \dots, M_{10}$ le energie corrispondenti ai vari gradi di magnitudo, vediamo che esse corrispondono ad una progressione geometrica di ragione $10^{3/2}$:

$$M_1, 10^{3/2}M_1, ..., 10^{3n/2}M_1, ..., 10^{27/2}M_1$$

dove quindi $M_n = 10^{3(n-1)/2}M_1$ e dove $M_1 = 2 \cdot 10^6 J$ è l'energia associata alla scossa campione. La magnitudo, come si vede , è l'esponente del fattore $10^{3/2}$, aumentato di uno, per il quale dobbiamo moltiplicare l'energia di riferimento per trovare l'energia liberata. Per rappresentare una grandezza di questo tipo, se consideriamo M_1 come unità di misura e $10^{15}M_1$ come fondo scala, occorre trovare una trasformazione che contragga l'intervallo $[0, 10^{15}]$ in un segmento miliardi di volte più piccolo, consevando l'ordinamento.

Esempio n.3 : la magnitudo stellare

La risposta del nostro occhio agli stimoli luminosi è logaritmica. Se fosse lineare rischieremmo di essere accecati ad esempio passando da un ambiente scarsamente illuminato come l'interno di un'abitazione all'aperto in piena luce, dove la luminosità aumenta anche di 100 volte. Grazie a questa proprietà siamo in grado di percepire senza problemi sia il tenue barlume di una stella sia il bagliore di una fulmine. Ipparco (II° sec. A.C.) fu il primo a introdurre il concetto di magnitudine stellare. Egli definì di prima grandezza le stelle visibili più luminose (luminosità apparente) e di sesta grandezza quelle appena percettibili ad occhio nudo. Una stella di sesta grandezza è 100 volte meno luminosa di una di prima. Ciò equivale a dire che a ogni grado di magnitudine in più corrisponde una diminuzione di luminosità di un fattore $\sqrt[5]{100} = 10^{0,4} \simeq 2,512$ essendo $\sqrt[5]{100} \times \ldots \times \sqrt[5]{100} = (\sqrt[5]{100})^5 = 100$. Se consideriamo la progressione geometrica dei valori formata dalle potenze successive di $\sqrt[5]{100}$:

$$(\sqrt[5]{100})^0 \; (\sqrt[5]{100})^1 \; (\sqrt[5]{100})^2 \; (\sqrt[5]{100})^3 \; (\sqrt[5]{100})^4 \; (\sqrt[5]{100})^5 \ldots$$

vediamo che gli esponenti, che indicano le luminosità decrescenti, sono proprio i logaritmi in base $\sqrt[5]{100} \simeq 2,512$ di tali valori. Se, pertanto, sappiamo che una certa stella è, per esempio, 20 volte più debole di un'altra, per conoscere di quanto aumenta la magnitudine basterà calcolare il numero ΔM tale che $(\sqrt[5]{100})^{\Delta M} = 20$ cioè il logaritmo di 20 in base 2,512, ossia $\Delta M = \log_{\sqrt[5]{100}} 20$. Potrebbe sembrare complicato calcolare dei logaritmi in questa base, ma sfruttando le proprietà dei logaritmi e in particolare ricordando la formula del cambiamento di base

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{\log_{10} b}{\log_{10} a}$$

possiamo semplificare l'espressione così $\Delta M = \frac{\log_{10} 20}{\log_{10} 10^{0,4}} = \frac{\log_{10} 20}{0,4} = 2,5 \cdot \log_{10} 20$.

Esempio n.4: scala dell'Universo

L'Universo, dal livello dei quark e dei neutrini ($\sim 10^{-24} m$), a livello microscopico, sino ai miliardi di anni-luce ($\sim 10^{26} m$), a livello macroscopico mostra, allo stato delle conoscenze attuali, una variazione di lunghezze che copre ben50 ordini di grandezza. Se volessimo fare una specie di "deep zoom" dalle massime dimensioni dell'universo a quelle più piccole attraverso le potenze di 10 la scala dello zoom in metri varierebbe da 10^{26} a $10^{-24,}$ e sarebbe quindi più agevolmente descritta dal solo esponente di 10, cioè dal logaritmo in base 10 della scala corrispondente, che varia da 26 a -24. Una animazione in Adobe flash che mostra effettivamente questo "deep zoom" si può vedere all'indirizzo web scala dell'Universo`http://htwins.net/scale2/` ideato da Cary Huang. Un video del 1977 che mostra uno zoom attraverso le "powers of ten" si può vedere all'indirizzo `http://scaleofuniverse.com/`.Powers of ten

Scala logaritmica

Come abbiamo visto nei vari esempi, in tutti i casi in cui la grandezza da rappresentare varia di molti ordini di grandezza, un grafico con una scala lineare , dove a lunghezze uguali corrispondono variazioni numeriche uguali e quindi le tacche corrispondono a una progressione aritmetica di valori, risulta inadatto. Potremmo pensare di operare una trasformazione omotetica $f : \Re \to \Re$ del tipo $f(x) = kx \; k > 0$ in grado di contrarre o dilatare sensibilmente un segmento, ma otterremmo una scala che è ancora lineare e quindi inadatta. Vedremo che ciò che ci occorre è una trasformazione logaritmica. La trasformazione $f : \Re^+ \to \Re, \; f(x) = \log_{10}(x)$ trasforma la progressione geometrica delle potenze del 10 in una progressione aritmetica:

$$\ldots 10^{-n}, \ldots, 10^{-2}, 10^{-1}, 1, 10, 10^2, \ldots, 10^n \ldots \implies -n, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots n \ldots$$

così mentre x passa da un ordine di grandezza al successivo $f(x)$ varia di un intero. Ad es. se x passa da 10 a 10^3, $f(x)$ passa da 1 a 3. Quindi il logaritmo in base 10 trasforma l'intervallo $(0,1)$ nella semiretta $(-\infty, 0)$ operando una dilatazione della scala mentre trasforma la semiretta $[1, +\infty)$ nella semiretta $[0, +\infty)$ operando una contrazione di scala.

La scala logaritmica permette dunque di rappresentare agevolmente grandezze che differiscono per diversi ordini di grandezza, da 1 a 100 . Porta ad es. le grandezze macroscopiche tra 1 e 10^{100} in quelle tra 0 e 100 e porta le grandezze microscopiche tra 10^{-100} e 1 in quelle tra -100 e 0.

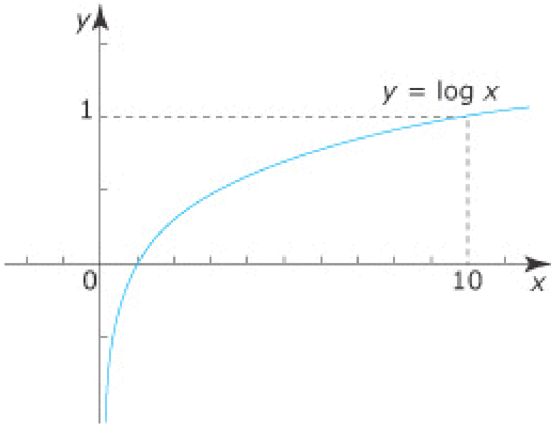

FIGURE 0.3.

Se poniamo $Y = \log_{10} y$ tra i valori y ed Y sussiste una corrispondenza descritta nella seguente tabella:

y	$\log_{10} y$
1	0,000
2	0,301
3	0,477
4	0,602
5	0,699
6	0,778
7	0,845
8	0,903
9	0,954
10	1,000
20	1,301
30	1,477
40	1,602
50	1,699
60	1,778
70	1,845
80	1,903
90	1,954
100	2,000

Una traslazione unitaria sulla scala logaritmica equivale a moltiplicare per 10, una traslazione di 2 unità equivale a moltiplicare per 100 e così via. Il logaritmo decimale trasforma ogni ordine di grandezza $[10^k, 10^{k+1}]$ in un segmento unitario $[k, k+1]$ ed è l'unica trasformazione che lo fa.

Tornando all'esempio del pH se y sono i valori delle concentrazioni molari $[H^+]$ che variano tra 10^0 e 10^{14} e se poniamo $Y = \log_{10} y = \log_{10}[H^+]$otteniamo che i corrispondenti valori di Y sono $0, -1, -2, -3, \ldots, -14$ e poichè sono quasi tutti negativi conviene porre $pH = -\log_{10} y$=-$\log_{10}[H^+]$ ottenendo una scala del pH più facilmente comprensibile.

Nella scala Richter se associamo ai valori y le energie liberate:

$$M_1,\ 10^{3/2} M_1,\ 10^3 M_1, \ldots, 10^{3n/2} M_1, \ldots, 10^{27/2} M_1$$

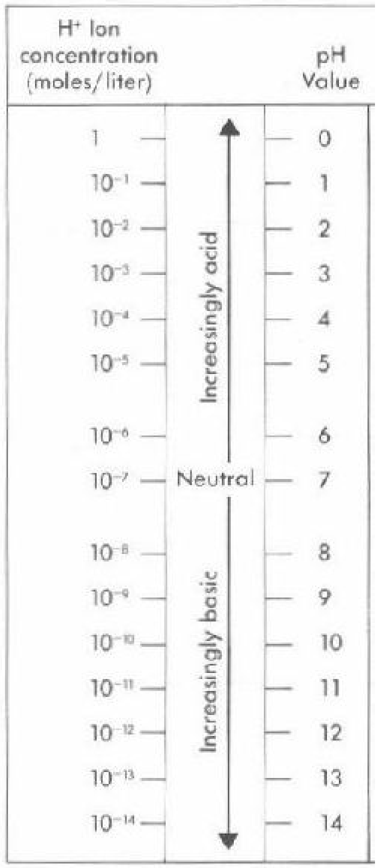

FIGURE 0.4.

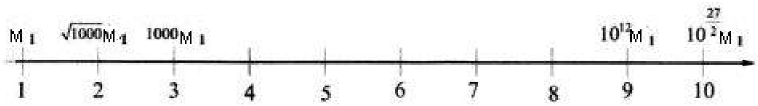

FIGURE 0.5.

che formano una progressione geometrica cioè $M_n = 10^{3(n-1)/2}M_1$ per $n = 1, 2, \ldots, 10$ passando ai logaritmi in base 10 ricaviamo i valori $Y = \log_{10} M_n = \log_{10} M_1 + \frac{3(n-1)}{2}$ che formano una successine aritmetica. Allora il grado n della scala Richter corrisponde all'energia liberata $n = \frac{2}{3}\log_{10}\frac{M_n}{M_1} + 1$.

Piano semilogaritmico

In un sistema di riferimento possiamo adottare per l'asse delle ascisse e per l'asse delle ordinate sia scale lineari che logaritmiche. Se sull'asse delle ordinate prendiamo una scala logaritmica e sull'asse delle ascisse una scala lineare otteniamo il cosìdetto piano semilogaritmico. Una particolarità di questo sistema di riferimento è che se consideriamo una funzione esponenziale del tipo:

$$y = f(x) = B \cdot a^{kx}$$

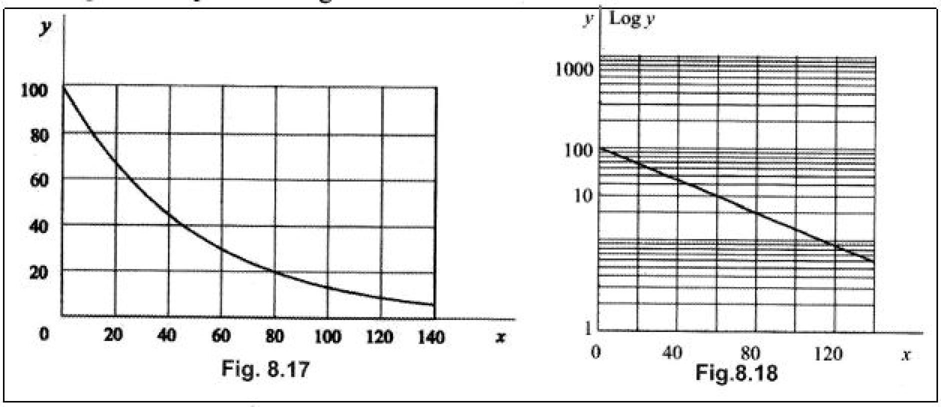

FIGURE 0.6.

con $1 \neq a > 0$, $k \in \Re$ nel normale piano x, y e passiamo al logaritmo in base 10 si ha: $\log_{10} y = \log_{10}(B \cdot a^{kx}) = \log_{10} B + (k \log_{10} a)x$. Se poniamo $Y = \log_{10} y$ si ha allora $Y = \log_{10} B + (k \log_{10} a)x$ e quindi nel piano semilogaritmico la funzione esponenziale viene trasformata in una funzione lineare dove $\log_{10} B$ è l'ordinata dell'intersezione con l'asse Y e $k \log_{10} a$ è il coefficiente angolare della retta. Abbiamo così ottenuto una *linearizzazione* logaritmica.

Esempio: Nella sterilizzazione del latte alla temperatura costante di 120 °C la quantità y di spore di Bacillus Stearothermophilus segue la prima legge di Bigelow secondo la quale $y = f(t) = 100 \cdot (0,98)^t$, dove t è la durata del processo di sterilizzazione. Se applichiamo una linearizzazione logaritmica otteniamo: $Y = \log_{10} y = \log_{10} 100 + t \cdot (\log_{10} 0,98) = 2 + t \cdot (\log_{10} 0,98)$. Essendo $\log_{10} 0,98 \simeq -0,0087$ nelle coordinate semilogaritmiche $t\, ed\, Y$ la funzione esponenziale viene trasformata nella funzione lineare $Y = 2 - 0,0087 \cdot t$.

Piano logaritmico

Se invece consideriamo una scala logaritmica su entrambi gli assi si parla di *piano logaritmico*. In questo caso si ottiene una linearizzazione delle funzioni polinomiali. Se infatti consideriamo una funzione polinomiale del tipo

$$y = f(x) = A \cdot x^B$$

passando ai logaritmi e ponendo $X = \log_{10} x$ e $Y = \log_{10} y$ si ha $Y = \log_{10} y = \log_{10} A + B \cdot \log_{10} x = \log_{10} A + B \cdot X$

Quindi una curva polinomiale nel piano xOy viene trasformata nel piano logaritmico XOY in una retta di eq.

$$Y = \log_{10} A + B \cdot X$$

dove $\log_{10} A$ è l'ordinata del punto d'intersezione con l'asse Y, e B è il coefficiente angolare. Dunque il grado B del monomio corrisponde alla pendenza della retta.

Esempio: Un modello semplificato della relazione che esprime lo spazio di arresto $s_\mu(v)$ di un veicolo in funzione della sua velocità v e di un coefficiente di aderenza μ legato alla condizione del fondo stradale è espresso da

$$s_\mu(v) = \frac{v^2}{250\mu}$$

dove $0,1 \leq \mu \leq 0,8$, con ad es. $\mu = 0,1$ per una strada ghiacciata, $\mu = 0,5$ per una strada asfaltata liscia e $\mu = 0,8$ per una strada asfaltata con fondo granuloso. E' chiaro che lo spazio di arresto è inversamente proporzionale a μ. Vediamo, al variare del coefficiente di aderenza μ,

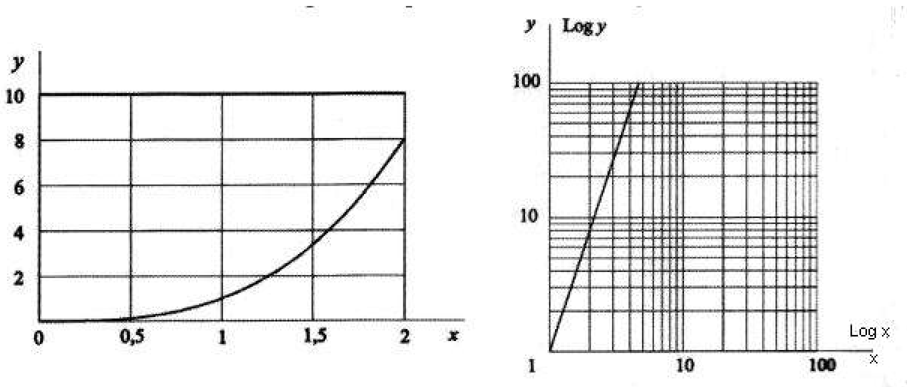

FIGURE 0.7.

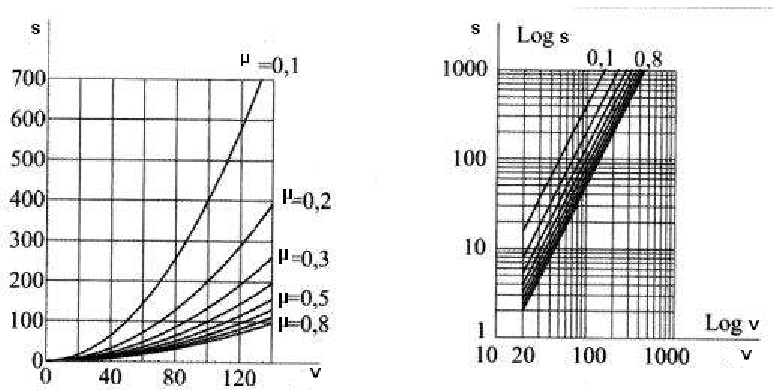

FIGURE 0.8.

come vengono rappresentate le funzioni $s_\mu(v)$ sia in un sistema di riferimento con scale lineari sOv, sia nel piano logaritmico associato SOV dove si aver posto $S = \log_{10} s$ e $V = \log_{10} v$. Otteniamo una famiglia di parabole con vertice nell'origine nel primo caso ed un fascio di rette parallele aventi coefficiente angolare 2 nel secondo caso, di equazione $S = 2V - \log_{10}(250\mu)$.

Interpolazione esponenziale

Un altro esempio di applicazione del piano semilogaritmico è l'interpolazione esponenziale. Assegnati due punti $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$in un riferimento cartesiano xOy (con $x_A \neq x_B$ e $y_a \neq y_B$), vogliamo trovare una curva esponenziale appartenente alla famiglia di eq. $y = f(x) = C \cdot a^{kx}$ (con $C > 0$ e $k \neq 0$) passante per i due punti dati. Poichè nel piano semilogaritmico la curva è rappresentata da una retta e per due punti distinti passa una sola retta, allora esiste un'unica curva esponenziale della famiglia passante per i due punti. Per trovarla imponiamo il passaggio per i due punti:

$$\begin{cases} C \cdot a^{k \cdot x_A} = & y_A \\ C \cdot a^{k \cdot x_B} = & y_B \end{cases}$$

Passando ai logaritmi otteniamo un sistema lineare:

$$\begin{cases} \log_{10} C + k \cdot x_A \log_{10} a = & \log_{10} y_A \\ \log_{10} C + k \cdot x_B \log_{10} a = & \log_{10} y_B \end{cases}$$

nelle due incognite k e $\log_{10} C$. Poichè per $x_A \neq x_B$ la matrice del sistema $\begin{pmatrix} 1 & x_A \log_{10} a \\ 1 & x_B \log_{10} a \end{pmatrix}$ ha determinante non nullo , il sistema ammette un'unica soluzione. In alternativa il sistema si può risolvere ricavando k dall'eq. ottenuta dividendo membro a membro, eliminando C, e risostituendo il valore di k trovato in una delle due eq. di partenza in modo da ricavare C.

Esempio extra: la dimensione frattale di una curva

Esempio extra: la dimensione frattale di una curva piana. Esistono varie definizioni di dimensione. Nella maggior parte dei casi l'idea di base è quella della "misura alla scala δ" . Per ogni δ operiamo delle misure sull'insieme in modo da ignorare le eventuali irregolarità di grandezza inferiore a δ e poi osserviamo il comportamento di queste misure quando $\delta \to 0^+$. Ad esempio, se $\mathfrak{L}$ è una curva piana allora le nostre misure $N_\delta(\mathfrak{L})$ potrebbero essere il numero di passi contati su $\mathfrak{L}$ con un compasso aperto ad ampiezza δ. La dimensione di $\mathfrak{L}$ si può allora definire determinando il tipo di crescita di $N_\delta(\mathfrak{L})$ quando $\delta \to 0^+$. Se vale la legge di potenza:

$$N_\delta(\mathfrak{L}) \sim c \left(\frac{1}{\delta}\right)^s$$

con c ed s costanti, diciamo che $\mathfrak{L}$ ha "dimensione del compasso" s. Passando ai logaritmi otteniamo $\log N_\delta(\mathfrak{L}) \cong \log c - s \log \delta$, da cui passando al limite

$$s = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{\log N_\delta(\mathfrak{L})}{\log\left(\frac{1}{\delta}\right)}.$$

Queste formule si adattano bene ad un calcolo numerico, poichè s si può stimare come la pendenza, cambiata di segno, di una retta in un sistema di riferimento in scala logaritmica di $\log N_\delta(\mathfrak{L})$ rispetto a $\log \delta$. Naturalmente, nella realtà, avremo a che fare con solo un certo numero di valori δ e relative misure. La pendenza della retta nel caso di una stima empirica potrà essere fatta con un metodo di interpolazione quale quello dei minimi quadrati.

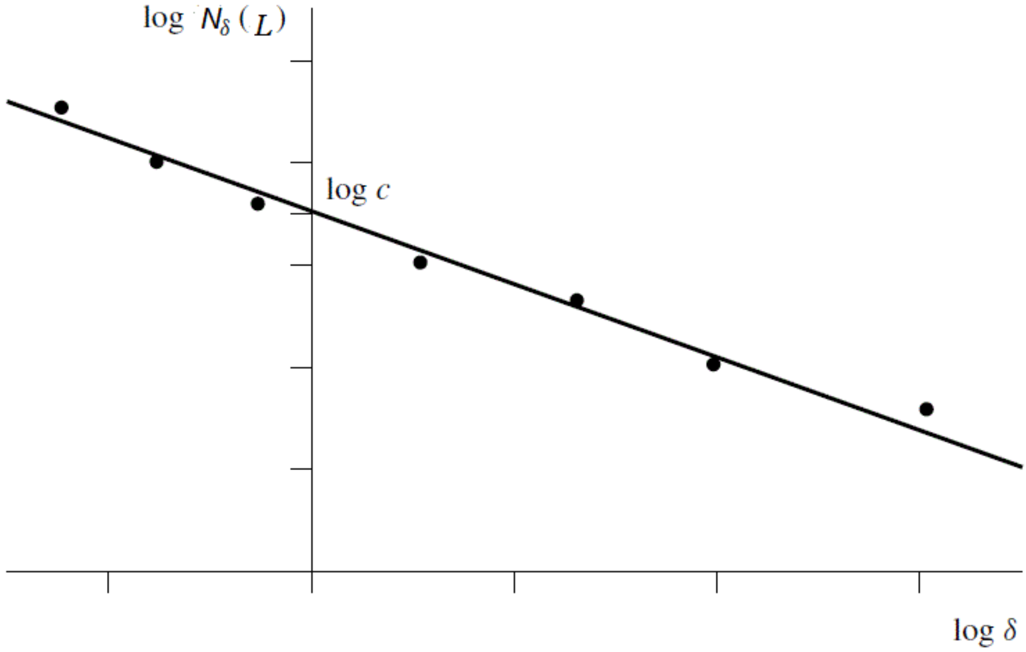

FIGURA 0.9. Stima empirica della dimensione di una curva piana $\mathfrak{L}$, supponendo che valga la legge di potenza $N_\delta(\mathfrak{L}) \sim c\delta^{-s}$.

In un articolo del 1967 pubblicato su Science, uno dei primi riguardanti i suoi studi sui frattali, Mandelbrot si chiedeva, provocatoriamente, "quanto è lunga la costa della Gran Bretagna?"

Scheda Unità didattica

Disciplina	Matematica
Periodo di riferimento	Primo quadrimestre
Destinatari	Classe IV – Liceo Scientifico
Prerequisiti	Definizione e proprietà degli esponenziali e dei logaritmi. Ordini di grandezza
Obiettivo generale	Comprendere cosa sono le scale logaritmiche, come e perchè si utilizzano
Obiettivi specifici	Comprendere alcuni esempi di applicazione pratica delle scale logaritmiche in settori disciplinari diversi
Metodologie didattiche di riferimento	Lezioni frontali, supportate da rappresentazioni grafiche mostrate attraverso un Pc
Competenze acquisite	Saper interpretare dei grafici in scala logaritmica; saperli applicare in alcuni processi di linearizzazione.
Modalità di svolgimento	Lezioni teoriche in classe
Tempo di svolgimento	1 ora e 30 minuti