Attività finale del laboratorio di didattica di Matematica – Prof. P. Brandi
Progetto di: **ROBERTA FLORI** - TFA A049 - A.A. 2011-2012

Argomento scelto: Funzione esponenziale e funzione logaritmo.

Contesto: Nel percorso scolastico di una scuola secondaria di secondo grado è, attualmente, tra gli argomenti curriculari del quarto anno (con i nuovi piani didattici sarà invece tra gli argomenti del terzo anno). Nello specifico questa unità didattica è pensata come lezione da proporre in due classi quarte del Liceo Scientifico Alessi in cui sto' svolgendo il tirocinio diretto.

Scopo dell'unità didattica: approfondire le funzioni logaritmo ed esponenziale e soprattutto far vedere la loro capacità di semplificare i calcoli e di rendere efficaci rappresentazioni grafiche altrimenti non facilmente realizzabili e leggibili, mostrare con degli esempi che molti fenomeni naturali trovano una chiara e sintetica descrizione se si formulano facendo uso dei logaritmi.

Contenuti specifici dell'unità didattica: tenendo che ai ragazzi sono già stati introdotti esponenziale e logaritmo, sia come operatori, sia come funzioni, l'unità didattica prevede l'introduzione di questi concetti in modo alternativo passando dal collegamento tra progressione geometrica e progressione aritmetica, in modo semplice ed intuitivo perché non conoscono le progressioni e le loro proprietà.
Si passerà poi ad esporre le proprietà specifiche dei logaritmi mettendo in evidenza come grazie a queste operazioni quali l'elevamento a potenza e l'estrazione di radice vengono sostituite da moltiplicazione e divisione, e queste ultime da addizione e sottrazione.
Infine si farà vedere come molti dei fenomeni naturali hanno un andamento esprimibile in modo efficace attraverso funzioni esponenziali o logaritmiche.

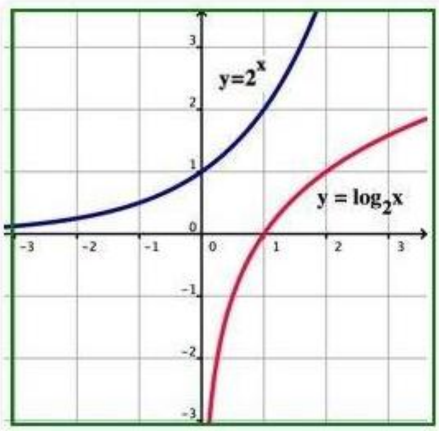
Tempo previsto per l'esposizione in classe: 60 minuti.

Articolazione di dettaglio dell'unità didattica: una prima parte più teorica ed una seconda parte con l'analisi e la modellazione di casi reali con funzioni esponenziali o logaritmiche.

- **PARTE I: La potenza dei logaritmi**

Per capire cosa sono i logaritmi e qual è la loro utilità, partiamo dallo stesso ragionamento che portò alla loro scoperta, dovuta allo scozzese John Napier, meglio noto con il nome latinizzato di Nepero.
Egli notò una sorprendente corrispondenza fra i termini di alcune progressioni numeriche: queste non sono altro che successioni di numeri ordinati secondo una determinata legge. Consideriamo quindi anche noi due particolari progressioni numeriche e precisamente: 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 e 1, 4, 16, 64, 256, 1.024, 4.096, 16.384, 65.536. La prima serie di numeri che abbiamo scritto si chiama *progressione aritmetica* ed è caratterizzata dal fatto che ciascun termine si ottiene aggiungendo 2 al precedente. La seconda serie di numeri si chiama *progressione geometrica* ed è caratterizzata dal fatto che ciascun termine si ottiene dal precedente moltiplicandolo per 4. In generale, in una progressione aritmetica è sempre costante la differenza fra ciascun termine (escluso il primo) e il suo precedente e in una progressione geometrica è sempre costante il quoziente fra ciascun termine (escluso il primo) e il suo precedente. Questi valori costanti si chiamano *ragione* delle rispettive progressioni.
Prendiamo ora due termini qualsiasi della prima progressione scritta sopra, ad esempio il 4 e il 12, sistemati rispettivamente al 3° e al 7° posto e sommiamoli; si ottiene 16, un numero che occupa il 9° posto della serie. Se adesso consideriamo i termini che nella seconda progressione si trovano sistemati anch'essi al 3° e al 7° posto, cioè il 16 e il 4.096 e li moltiplichiamo otteniamo un numero,

65.536, che occupa lo stesso posto, il nono, che nella prima progressione occupava la somma.
Facciamo un altro esempio. Prendiamo il 6 che è sistemato al 4° posto della prima progressione e sottraiamolo dal 14 che sta all'8° posto; otteniamo 8, un numero che occupa il 5° posto della serie. Passiamo ora alla seconda progressione e dividiamo i due numeri sistemati, come i precedenti, rispettivamente all'ottavo e al quarto posto cioè 16.384 e 64; otteniamo 256, cioè un numero che ancora una volta occupa il 5° posto, esattamente dove si trovava l'8 (il risultato della sottrazione) all'interno della progressione aritmetica.
Stiamo allora vedendo che esiste un collegamento tra progressione geometrica e progressione aritmetica e che è possibile in qualche modo semplificare i calcoli, passando da moltiplicazione a somma e da divisione a sottrazione. Vediamo di definire con maggior precisione come ciò è possibile.
Per farlo dobbiamo prima riscrivere la progressione geometrica utilizzata sopra in modo diverso e cioè come segue: 2^0, 2^2, 2^4, 2^6, 2^8, 2^{10}, 2^{12}, 2^{14}, 2^{16}. Ciascun elemento della serie ora appare espresso sotto forma di potenza. Una potenza, come sappiamo, è costituita da un numero chiamato base (il 2 nel nostro esempio) elevato ad un altro numero chiamato esponente. E' facile verificare che i termini della progressione rappresentati sotto forma di potenze corrispondono a quelli della progressione geometrica scritta sopra: $2^0 = 1$, $2^2 = 4$, $2^4 = 16$, $2^6 = 64$ e così via. Si noti inoltre che gli esponenti dei termini della nuova progressione (0, 2, 4, 6 ecc.) sono gli stessi numeri che compaiono nella progressione aritmetica scritta all'inizio.



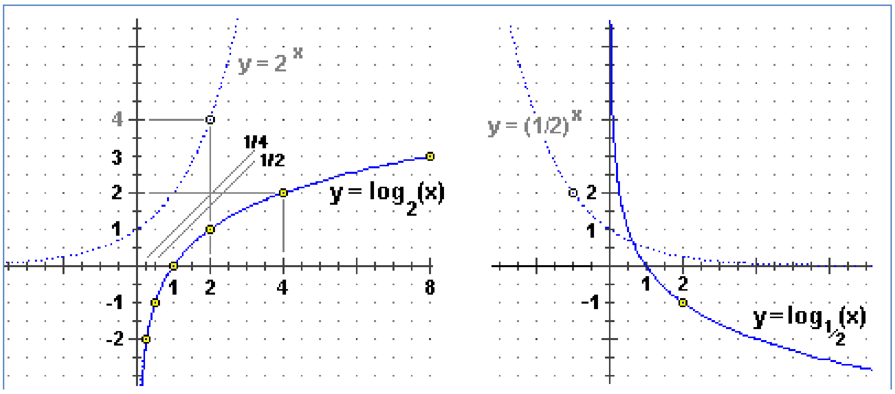
Ora possiamo dare la definizione completa di logaritmo: *"Il logaritmo di un numero in una certa base è l'esponente da dare alla base per ottenere il numero stesso"*. Ad esempio, il logaritmo di 8 in base 2 è 3 perché 2^3 fa 8. In simboli il nostro logaritmo si scrive, come noto, nel modo seguente: $\log_2 8 = 3$. Pertanto le due eguaglianze $\log_2 8 = 3$ e $2^3 = 8$ sono equivalenti.

Per comprendere in che modo i logaritmi siano in grado di rendere più semplici i calcoli basta notare che esprimendo i numeri sotto forma di potenze la moltiplicazione e la divisione si riducono a semplici somme e sottrazione di esponenti (ad esempio, la moltiplicazione di 10.000 per 1.000 si trasforma semplicemente in $10^4 \cdot 10^3 = 10^{4+3} = 10^7$) e l'elevamento a potenza e l'estrazione di radice diventano una semplice operazione di moltiplicazione e di divisione degli esponenti: ad esempio la radice cubica di 1.000.000 è $10^{6/3} = 10^2$.
Abbiamo così dimostrato allora che **i logaritmi consentono, per così dire, di "abbassare di grado" le operazioni sui numeri: elevamento a potenza ed estrazione di radice vengono sostituite da moltiplicazione e divisione e queste ultime da addizione e sottrazione**.
Ovviamente i logaritmi non sono applicabili alle operazioni di addizioni e sottrazione.

Abbiamo detto che i logaritmi trovano svariate applicazioni. Fra queste vi è pure quella di una **comoda e chiara rappresentazione di alcuni diagrammi i quali sarebbero illeggibili, o quanto meno poco significativi, se non si facesse uso dei logaritmi.** Vi sono infatti alcune grandezze che crescono così rapidamente, al variare di altre, che diventa impossibile rappresentarle efficacemente su un foglio mantenendo la scala reale dei valori. Nello specifico risulterebbe molto difficile rappresentare una crescita esponenziale caratterizzata, come noto, dalla legge che ad intervalli di tempo uguali corrispondono incrementi pari ad una frazione costante del totale.
Per rendersi conto dell'estrema rapidità della crescita di tipo esponenziale consideri l'indovinello seguente. Immaginiamo di avere un laghetto al centro del quale cresce una ninfea che ogni giorno raddoppia le proprie dimensioni: se la pianta potesse svilupparsi liberamente, dopo 30 giorni coprirebbe completamente il lago soffocando tutte le altre forme di vita. Ora, se si decidesse di tagliare la ninfea quando le sue foglie hanno coperto metà del lago in modo da salvarlo da morte sicura in quale giorno si dovrebbe intervenire? La risposta è al 29° giorno, cioè vi sarebbe un solo

giorno di tempo per rimediare ad una situazione che il giorno dopo diventerebbe irreparabile. Il risultato è sorprendente soprattutto se si riflette sul fatto che il 25° giorno era coperto appena poco più del 3% del lago: nelle crescite di tipo esponenziale all'inizio le cose vanno piano poi accelerano in modo impressionante.
La crescita esponenziale viene spesso espressa efficacemente attraverso il cosiddetto "tempo di raddoppiamento", che è il tempo necessario affinché una grandezza raddoppi il proprio valore (incremento del 100%). Nel caso della ninfea che abbiamo appena esaminato il tempo di raddoppiamento è di un giorno!

La funzione esponenziale è l'inversa della funzione logaritmo, e sono del tipo: $y=2^x$, 10^x, e^x,ecc. Nelle funzioni esponenziali (con base maggiore di 1) se il valore della x cresce lentamente la funzione intera cresce molto, ma molto più rapidamente: ad esempio, nella funzione $y = 2^x$ se x assume i valori successivi di 1, 2, 3, 4, ecc., la y assume i valori corrispondenti di 2, 4, 8, 16, ecc. Se la base è minore di 1 (ma maggiore di zero) la funzione diventa sempre più piccola a mano a mano che la x cresce: ad esempio nella funzione esponenziale $y =(0,5)^x$ se x assume i valori successivi di 1, 2, 3, 4, ecc. la y diventa 0,50, 0,25, 0,12, 0,06, ecc., cioè tende a zero.



Abbiamo detto che i logaritmi furono utilizzati originariamente per semplificare i calcoli numerici che oggi è possibile eseguire facilmente con le calcolatrici tascabili e quindi hanno perso gran parte della loro originaria funzione. Ma la potenza dei logaritmi è a tutt'oggi innegabile ed essi trovano ancora impiego e applicazione in tante discipline quali la biologia, l'astronomia, le scienze della terra e nelle operazioni finanziarie.
La ragione della loro ubiquità è che queste funzioni costituiscono modelli matematici che consentono di descrivere una grande varietà di fenomeni: vedremo ad esempio che grazie al modello fornito dalle funzioni esponenziali è possibile sia effettuare "previsioni sul futuro" (come prevedere quale sarà la crescita di una popolazione), sia "riscoprire il passato" (per esempio datare l'età di un fossile).

- **PARTE II: La natura è logaritmica**

La natura sembra prediligere i logaritmi. E' un fatto che molti fenomeni naturali trovino descrizione chiara e sintetica proprio quando vengono formulati facendo uso dei logaritmi.

- *La crescita dei batteri*

Abbiamo detto che i logaritmi trovano svariate applicazioni. Fra queste vi è pure quella di una comoda e chiara rappresentazione di alcuni diagrammi i quali sarebbero illeggibili, o quanto meno poco significativi, se non si facesse uso dei logaritmi. Vi sono infatti alcune grandezze che crescono così rapidamente, al variare di altre, che diventa impossibile rappresentarle efficacemente su un foglio mantenendo la scala reale dei valori.

Per chiarire il concetto facciamo l'esempio della crescita dei batteri.
I batteri sono organismi viventi fra i più semplici e i più piccoli che si conoscano. Sono formati da una sola cellula della grandezza del millesimo di millimetro e il loro peso è dell'ordine del miliardesimo di milligrammo, ossia ce ne vorrebbero mille miliardi per fare un grammo. I batteri si riproducono con estrema rapidità per semplice scissione, cioè si dividono a metà e poi ciascun individuo si accresce e, raggiunta la dimensione adulta, subisce una nuova scissione. Ora, se le condizioni ambientali sono favorevoli, si possono avere anche tre generazioni in un'ora. Immaginiamo quindi di voler calcolare la crescita di una popolazione di batteri partendo da un singolo esemplare: dopo venti minuti ne avremmo già 2, dopo quaranta minuti 4 e dopo un'ora ossia dopo tre generazioni 8, dopo 2 ore, cioè dopo 6 generazioni 32 (26), dopo 5 ore 32.768 (215) e così via secondo le potenze del 2.

Il numero dei batteri aumenta secondo le potenze del 2 perché la cellula si divide in due ad ogni generazione, se la cellula si dividesse simultaneamente in tre il numero aumenterebbe secondo le potenze del 3 e se si dividesse in 10, secondo le potenze del 10. Il numero dei batteri che si riproduce per semplice scissione può essere quindi rappresentato attraverso la seguente funzione esponenziale:

$$y = 2^x$$

in cui y è il numero dei batteri e x il numero delle generazioni.

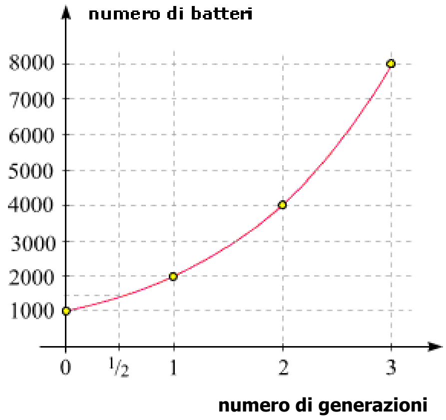
Applicando l'equazione scritta sopra, è facile calcolare il numero teorico di batteri presenti dopo un certo numero di generazioni partendo da un singolo batterio. Per esempio si calcola che dopo 72 generazioni, cioè, nel nostro esempio, dopo un giorno, i batteri sarebbero diventati 272 che fa circa quattromila settecento miliardi di miliardi ($4{,}7 \cdot 10^{21}$), un numero di batteri che, nonostante il peso irrisorio di un singolo esemplare, corrisponde a un peso complessivo di 4.700 tonnellate. Naturalmente non si arriva mai a questi eccessi perché l'ambiente naturale non è illimitato e immutabile e quindi molto prima di avere una densità massima di circa un miliardo di individui per cm^3 il numero tende a restare stazionario. Tuttavia, sperimentalmente, si possono realizzare le condizioni desiderate mettendo a disposizione dell'organismo un terreno di coltura molto ampio e stabile, nel quale può essere studiato il fenomeno dell'accrescimento teorico dei batteri.
Partire da un singolo batterio per sapere quanti ve ne saranno dopo un certo tempo è un caso del tutto teorico. Normalmente quello che interessa sapere è quanti diventeranno i batteri (o qualsiasi altra cosa che si accresca in modo esponenziale), dopo un certo numero di generazioni, se si parte da un determinato numero iniziale.
L'equazione utile per dare risposta a questo tipo di quesito è la seguente:

$$N = N_0 \cdot 2^x$$

in cui N è il numero di batteri che sarà presente dopo un certo numero di generazioni, N_0 è il numero iniziale di batteri e x è il numero delle generazioni che si vuole considerare.
Si noti che per ottenere il numero dei batteri finali bisogna moltiplicare 2^x per il numero iniziale di essi. La conseguenza di questa operazione è che il numero finale dei batteri dipende sensibilmente anche dal numero iniziale e non solo dal valore della x.

Se ora volessimo rappresentare con un'immagine geometrica la crescita dei batteri, dovremmo, come noto, tracciare su un foglio di carta due rette perpendicolari che si incontrano in un punto detto origine degli assi e quindi, scelte opportunamente le unità di misura, segnare su ciascuna retta una serie di punti che corrisponde a determinati valori delle grandezze in gioco.
Si può porre in particolare sull'asse orizzontale del piano il numero delle generazioni e sull'asse verticale il numero dei batteri.

In figura, per esempio, si è considerata una popolazione iniziale N_0 di 1000 batteri e si sono evidenziati il numero N dei batteri rispettivamente dopo 1, 2, 3 generazioni.



Ci rendiamo facilmente conto che per quanto piccola sia l'unità di misura scelta, già dopo una decina di generazioni il foglio di carta non sarebbe più sufficiente a contenere il diagramma.

A questo punto ci verrebbero tuttavia in soccorso i logaritmi.
Se sull'asse verticale invece che segnare il numero delle cellule si riportasse il logaritmo di tale numero il diagramma diventerebbe più contenuto e di più facile lettura. In verità facendo ricorso ai logaritmi il disegno, oltre a cambiare dimensioni, cambierebbe anche forma divenendo una retta!
Per rappresentare la funzione nel piano detto *semilogaritmico* è necessario trasformare le variabili; partiamo dalla relazione sopra $N = N_0 \cdot 2^x$ e passiamo al logaritmo in base 2 di entrami i membri.
Applicando le proprietà dei logaritmi si avrebbe:

$$log_2 N = log_2 N_0 + log_2 2^x$$

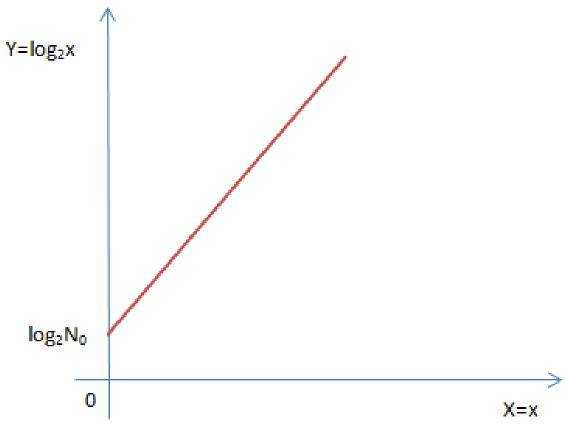
Ricordando la definizione di logaritmo ed attuando un cambio di variabile:

$$Y = log_2 N, \qquad X = x$$

La funzione diventa lineare del tipo:

$$Y = log_2 N_0 + X$$

Nel piano semilogaritmo quindi la legge di crescita dei batteri è rappresentata da una retta, che, come noto, può tra l'altro essere disegnata semplicemente assegnando 2 punti di passaggio.



Spesso non interessa tanto sapere quanti batteri (o più in generale quanti elementi di un insieme che si accresce) si avranno dopo un certo numero di generazioni, ma piuttosto quanti saranno diventati dopo un certo tempo.
In questo caso basta moltiplicare il numero delle generazioni (k), comprese nell'unità di tempo, per il tempo (t) di durata del processo e porre il prodotto di queste due grandezze ad esponente del numero che rappresenta i frammenti in cui si divide ogni singolo oggetto di partenza.
Sostituendo quindi kt a x, l'equazione relativa ai batteri, scritta sopra, diventa:

$N = N_0 \cdot 2^{kt}$

In questo caso (base della potenza uguale a 2), il reciproco di k, cioè 1/k, rappresenta il tempo necessario per raddoppiare il numero degli elementi presenti; nel piano semilogaritmico si avrebbe

$log_2 N = log_2 N_0 + k log_2 2^t$

Se si definiscono le variabili:

$$Y = log_2 N, \qquad T = t$$

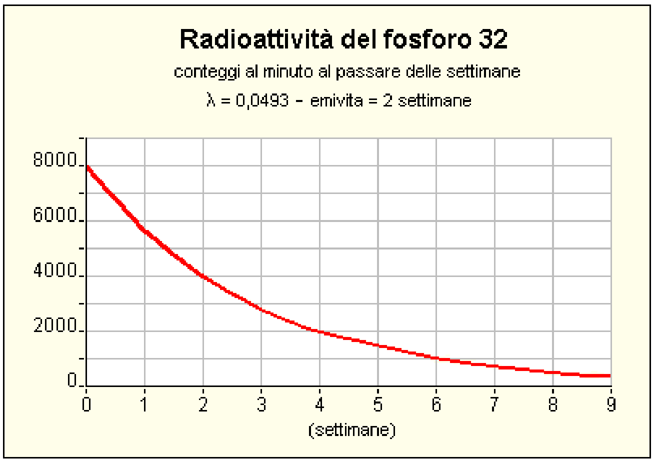
Si ottiene comunque una retta del tipo: $Y = log_2 N_0 + kT$

- *Il decadimento radioattivo*

Il decadimento radioattivo è un fenomeno che si presta molto bene ad essere analizzato attraverso i concetti che abbiamo esposto precedentemente.
Le sostanze radioattive sono dei composti chimici costituiti di atomi che si decompongono spontaneamente in altri atomi non radioattivi. Il fenomeno del decadimento radioattivo è di tipo esponenziale e l'equazione che dà la misura secondo cui la massa di sostanza radioattiva diminuisce nel tempo è la seguente:

$$m = m_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

dove m è la massa della sostanza radioattiva al tempo t, m_0 è la massa della sostanza radioattiva che era presente all'inizio dell'esperimento, cioè al tempo t=0, *e* è il numero di Nepero, un numero irrazionale che vale circa 2,7182 e rappresenta la base dei cosiddetti logaritmi naturali, e infine λ è una costante detta "costante di decadimento radioattivo" il cui valore è un numero caratteristico di ciascuna sostanza radioattiva e dà la misura della maggiore o minore rapidità con cui avviene il processo di trasformazione.
Più è grande il valore di lambda e maggiore è il numero degli atomi radioattivi che si trasformano in atomi non radioattivi nell'unità di tempo e quindi più rapido è il processo di decadimento.
In figura, a titolo di esempio, è rappresentato il decadimento del fosforo 32.
Come si vede si tratta di una formula molto simile a quella che è stata usata per definire la crescita dei batteri in condizioni ideali.
La differenza più sostanziale sta nel segno negativo che compare davanti all'esponente di *e*. Esso suggerisce che la legge di decadimento radioattivo è una legge di tipo esponenziale decrescente, cioè una legge la quale mostra che con il passare del tempo gli elementi presenti all'inizio diminuiscono e non aumentano di numero, come avveniva invece nel caso dei batteri.



Torniamo ora alle sostanze radioattive ed esaminiamo il comportamento di un milione di atomi di una di queste sostanze che si disintegra al ritmo di un atomo su mille all'ora.
Dopo un'ora, del milione di atomi di partenza, se ne saranno disintegrati mille e, se tale numero rimanesse costante, dopo mille ore se ne sarebbero disintegrati un milione, cioè tutti. Però nel caso del decadimento radioattivo le cose non vanno in questo modo, perché ciò che rimane costante non è il numero (1.000 atomi), ma l'intensità del fenomeno, cioè l'1 per mille all'ora (un atomo che si disintegra ogni ora su mille che sopravvivono).
Vediamo di capire meglio questo concetto facendo uso dei logaritmi, perché la giustificazione sta proprio nelle loro proprietà!
L'equazione che esprime la legge del decadimento radioattivo può essere formulata in termini logaritmici, e poiché in questa legge compare il numero e, si devono usare i logaritmi naturali:

$$\ell n\, m = \ell n\, (m_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t})$$

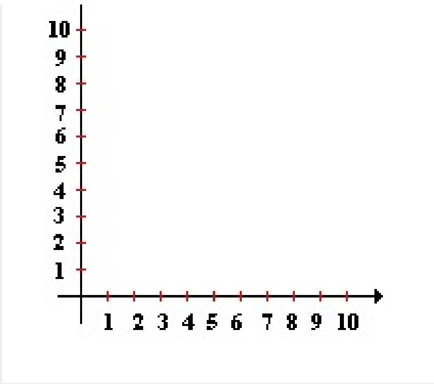
Ora, siccome il logaritmo di un prodotto è uguale alla somma dei logaritmi dei singoli fattori e il logaritmo di una potenza è uguale al prodotto dell'esponente per il logaritmo della base della potenza, l’espressione scritta sopra può essere riformulata nel modo seguente:

$$\ell n\, m = \ell n\, m_0 - \lambda\, t \cdot \ell n\, e$$

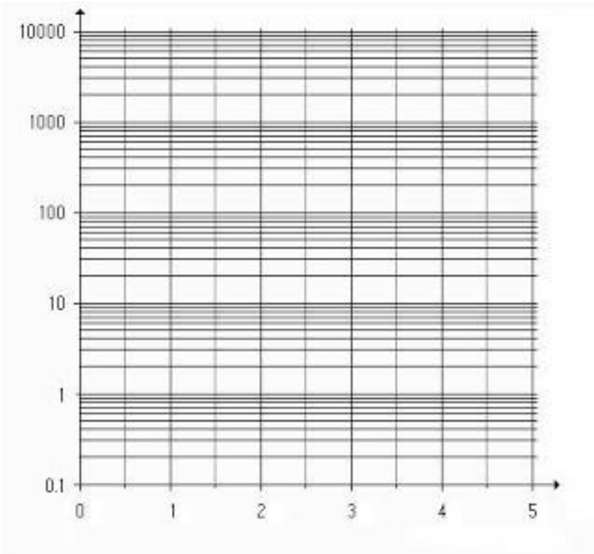
Quindi, tenendo conto che il logaritmo di base e di e vale 1, l'equazione può essere anche scritta in quest’altro modo:

$$\ell n\, m_0 - \ell n\, m = \lambda\, t$$

Scritta sotto questa forma, l'equazione mostra che la differenza fra i logaritmi di una certa massa di sostanza radioattiva è sempre la stessa in intervalli di tempo uguali (λ è una costante).
In altri termini si può anche dire che se si considera un determinato intervallo di tempo, per esempio un'ora, la differenza fra il logaritmo del numero degli atomi radioattivi presenti alla fine dell'ora e quello degli atomi presenti all'inizio dell'ora è sempre la stessa, indipendentemente dal momento in cui viene scelto l'intervallo di tempo di un'ora, cioè subito, fra un giorno o fra una settimana.
Tale proprietà caratterizza la scala logaritmica, che non è lineare, ma è invariante per traslazione; si osservi infatti come si conserva la distanza tra le rette orizzontali nell'ambito di uno stesso intervallo della variabile dipendente, indipendentemente da quale sia l'intervallo considerato.



Esempio di scala lineare



Esempio di scala logaritmica

Ora, poiché la differenza fra i logaritmi di due numeri è uguale al logaritmo del loro quoziente, se è costante la differenza fra i logaritmi delle masse delle sostanze radioattive, deve essere costante anche il logaritmo del loro quoziente, ma se è costante $\ell n\, (m_0/m)$, è costante pure il rapporto m_0/m.
Più in generale possiamo quindi affermare che in una crescita (o in una decrescita) di tipo esponenziale il quoziente fra il numero di individui all'inizio e quello alla fine di un determinato intervallo di tempo si mantiene costante e, siccome una successione di numeri nella quale è costante il quoziente fra ciascun termine e il suo precedente è una progressione geometrica, possiamo confermare che i valori di una funzione esponenziale costituiscono una progressione geometrica.
Da come viene espresso un incremento (o un decremento) siamo in grado quindi di capire immediatamente se esso è di tipo esponenziale oppure no: quando un incremento (o un decremento) viene espresso con un numero esso è di tipo lineare, se invece viene espresso in termini percentuali esso è sicuramente di tipo esponenziale.

Si basa sul fenomeno del decadimento radioattivo una nota tecnica sperimentale, la **datazione al carbonio-14**, utilizzata allo scopo di datare materiali aventi origine organica, ad esempio, un animale fossile.
Il carbonio possiede 3 isotopi, di cui 2 stabili (carbonio-12 e carbonio-13) e uno radioattivo, il carbonio-14 appunto. Il ^{14}C è incessantemente prodotto nell'alta troposfera e nella stratosfera terrestre (ricche di azoto-14, il cui simbolo è ^{14}N) come risultato del bombardamento dei raggi cosmici, particelle ad elevata energia, le quali spezzano i nuclei dei gas atmosferici, causando il rilascio di neutroni.
Alcuni di questi neutroni, resi così liberi, vengono assorbiti dagli atomi di azoto (ricordiamo che il suo numero atomico è Z = 7), che, di conseguenza, emettono un protone dai loro nuclei.

Ne consegue che il loro numero atomico diminuisce di una unità (passa cioè da 7 a 6), e si forma proprio un elemento differente: il carbonio-14.
Dopodiché, il radiocarbonio reagisce celermente con l'ossigeno generando l'anidride carbonica, una sostanza che, come ben noto, viene assorbita da piante ed animali. Ne deriva che tutti gli organismi, esseri umani compresi, contengono una piccola quantità di carbonio-14.
Finché un organismo rimane in vita, il radiocarbonio che decade viene continuamente rimpiazzato da altro radiocarbonio; ergo, il rapporto tra ^{14}C e ^{12}C resta costante e uguale a quello sussistente nell'atmosfera.
Tutto cambia non appena una pianta o un animale cessa di vivere.
Infatti, non essendoci più scambi di carbonio con l'esterno da parte dell'organismo, la quantità di carbonio-14 comincia a decrescere sempre più, man mano che il radionuclide decade (attraverso l'emissione di particelle β), trasformandosi nuovamente in azoto-14.
Sicché **è possibile determinare l'età di un reperto misurando il rapporto tra la quantità di carbonio-14 e di carbonio-12 che il suddetto contiene**.
A causa del decadimento, la concentrazione di radiocarbonio nel campione esaminato diminuisce in modo regolare, seguendo un'espressione analoga alla legge di Rutherford-Soddy:

$c = c_0\, e^{-\Delta t/\tau}$ ove:

- c_0 = concentrazione di carbonio-14 nell'atmosfera;
- Δt = tempo trascorso dal decesso dell'organismo;
- τ = vita media del radiocarbonio, equivalente a:

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} = \frac{5730}{\ln 2} = 8267 \text{ anni}$$

Misurando pertanto la quantità di carbonio-14 presente nei resti organici, se ne può ricavare l'età sfruttando la seguente equazione (ricavata dalla variante della legge di Rutherford-Soddy):

$$\Delta t = -\tau \ln(c/c_0)$$

Risulta importante specificare che tale tecnica ha i suoi limiti: infatti, è utile per datare campioni di età fino ai 50.000 anni, altrimenti si avrebbero quantità residue di carbonio-14 troppo esigue.

- *La classificazione delle rocce clastiche*

Anche i petrografi, ovvero i geologi che studiano i materiali rocciosi che compongono la crosta terrestre, utilizzano i logaritmi per classificare un tipo particolare di rocce.
Si tratta delle cosiddette rocce detritiche o clastiche (dal greco *clao* = spezzo), cioè di quelle rocce che si sono formate per accumulo di frammenti di rocce preesistenti.
La classificazione di queste rocce è basata fondamentalmente sulle dimensioni e sulla forma dei frammenti che le costituiscono: la granulometria è appunto per definizione la stima numerica relativa alle dimensioni dei singoli granuli costituenti un sedimento o una roccia sedimentaria, e questa stima è molto importante perché spesso è correlata ad altre proprietà del sedimento quali la permeabilità.
Le taglie di questi frammenti vengono ripartite in numerosi gruppi che sono detti *classi granulometriche*.

Ogni classe granulometrica raggruppa in sé i frammenti di roccia le cui dimensioni sono comprese fra due valori limite scelti arbitrariamente, ma posti all'interno di una determinata scala di grandezze detta "**Scala di Udden-Wentworth**" (1922), qui di seguito riportata.

Diametro delle particelle in mm	Definizione		
> 256	Masso	Boulder	Rudite
128	Ciottolo molto grossolano	Cobble	
64	Ciottolo grossolano	Cobble	
32	Ciottolo medio-grossolano	Pebble	
16	Ciottolo medio	Pebble	
8	Ciottolo medio-fine	Pebble	
4	Ciottolo fine	Pebble	
2	Granulo	Granule	Arenite
1	Sabbia molto grossolana	Very coarse sand	
½	Sabbia grossolana	Coarse sand	
¼	Sabbia media	Medium sand	
1/8	Sabbia fine	Fine sand	
1/16	Sabbia molto fine	Very fine sand	
1/32	Silt grossolano	Coarse silt	Pelite
1/64	Silt medio	Medium silt	
1/128	Silt fine	Fine silt	
1/256	Silt molto fine	Very fine silt	
<1/256	Argilla	Clay	

Si può osservare che le dimensioni limite delle classi granulometriche sono rappresentate dalle potenze intere positive e negative del 2. Quindi, in millimetri, esibiscono i seguenti valori: …256, 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, 1/64, 1/128, 1/256…
Questi numeri sono le potenze del 2 elevato rispettivamente agli esponenti: …8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8 ..., che ne rappresentano quindi i logaritmi di base 2.
Ed ecco che anche in questo caso ci vengono in aiuto i logaritmi per rendere tutto più facile!
Una metodologia di classificazione particolarmente efficace è infatti quella proposta da **Krumbein** (1934) il quale propone come unità ***phi*** : logaritmo negativo in base 2 del diametro delle particelle espresso in mm. Phi (Φ) diventa una quantità adimensionata che separa le classi espresse dalla scala Udden-Wentworth secondo singoli valori di Φ, con:

$$\Phi = -\log_2 D$$

dove D è il diametro di ogni singola particella espresso in mm. In questo caso la progressione geometrica in ragione 2 mm si riduce alla progressione lineare (aritmetica) dei logaritmi in base 2.

Le classi granulometriche sono molte, ma i limiti dimensionali più importanti sono solo due: 2 mm e 1/16 mm. Le rocce con granuli di diametro compreso entro questi due estremi sono dette, con termine derivato dal latino, areniti o psammiti (dal greco *psammos* = sabbia). Quelle formate di frammenti di dimensioni superiori a 2 mm sono dette ruditi o psefiti (dal greco *psephos* = ciottolo) e infine quelle con taglia inferiore a 1/16 mm sono dette lutiti o peliti (dal greco *pelos* = argilla).

Si parte, in pratica, da massi con diametro superiore a 256 mm per giungere a particelle con diametro inferiore a 1/256 mm. Le rocce psefitiche sono quelle in cui i clasti hanno dimensioni superiori a 2 mm di diametro e comprendono le ghiaie che sono depositi di detriti piuttosto grossolani a spigoli arrotondati in conseguenza del trasporto da parte di corsi d'acqua. Se gli spigoli dei frammenti sono vivi si parla di detriti di falda o brecce di pendio. Quando i frammenti sono fra loro cementati le rocce prendono il nome di puddinghe (con ciottoli arrotondati) e brecce (con ciottoli a spigoli vivi).
Le rocce psammitiche hanno i clasti del diametro compreso fra 2 mm e 1/16 mm e prendono il nome di sabbie o arene se i granuli sono liberi e arenarie se i granuli sono cementati. Le arenarie sono molto usate come materiale da costruzione. Fra esse assai note sono quelle toscane utilizzate per la edificazione dei centri storici delle principali città della regione, compresa Firenze, in cui ad esempio il "macigno", un'arenaria a grana media e cemento calcareo, è servito per la costruzione del basamento di palazzo Strozzi e la "pietra serena" una varietà di colore grigio azzurrognolo forma lo scalone della Galleria degli Uffizi.
Infine le rocce pelitiche hanno i clasti del diametro che va da 1/16 di millimetro (0,0625 mm) fino a valori inferiori a 1/256 di millimetro (0,0039 mm). Quando la grana è compresa fra 1/16 di mm e 1/128 di mm si hanno le siltiti, cosiddette perché composte da un sedimento chiamato *silt* (fango).
Quando le dimensioni dei grani sono ancora inferiori a questi valori, si hanno le argilliti. Siltiti e argilliti vengono anche dette, con termine comprensivo, limi e si formano per processi di trasporto e di deposito fluviale (limi fluviali), per trasporto e deposito ad opera del vento (*loess* o limi eolici) e per trasporto e deposito glaciale (*lehm* o limo glaciale). Le argille sono caratterizzate da forte igroscopicità, ossia hanno la tendenza a trattenere l'acqua. Quando piove il terreno argilloso tende ad aumentare di volume, mentre in periodi di siccità, a causa dell'evaporazione dell'acqua, la massa argillosa diminuisce di volume e su di essa appaiono profonde spaccature.

Per denominare i sedimenti, generalmente si usa la **classificazione dell' American Geophysical Union (AGU), che adotta la Scala di Wentworth, ma fa uso dell'unità Φ**:

Per denominare i sedimenti, generalmente si usa la classificazione dell' *American Geophysical Union* (AGU), che adotta la Scala di Wentworth:

Boulder = masso
Cobble = ciottolo
Gravel = ghiaia
Sand = sabbia
Silt = limo
Clay = argilla

Description of particle size			$\phi = -\log_2$	mm	$\psi = \log_2$
			- 12.0	4096	12.0
	very large		- 11.5	2896	11.5
			- 11.0	2048	11.0
	large		- 10.5	1448	10.5
Boulder			- 10.0	1024	10.0
	Medium		- 9.5	724	9.5
			- 9.0	512	9.0
	small		- 8.5	362	8.5
			- 8.0	**256**	**8.0**
	large		- 7.5	181	7.5
Cobble			- 7.0	128	7.0
	Small		- 6.5	90.5	6.5
			- 6.0	**64**	**6.0**
	very coarse		- 5.5	45.3	5.5
			- 5.0	32	5.0
	coarse		- 4.5	22.6	4.5
		Pebble	- 4.0	16	4.0
Gravel	medium		- 3.5	11.3	3.5
			- 3.0	8	3.0
	fine		- 2.5	5.66	2.5
			- 2.0	4	2.0
	very fine	**Granule**	- 1.5	2.83	1.5
			- 1.0	**2**	**1.0**
	very coarse		- 0.5	1.41	0.5
			0	1	0
	coarse		+ 0.5	0.707	- 0.5
			+ 1.0	0.500	- 1.0
Sand	medium		+ 1.5	0.354	- 1.5
			+ 2.0	0.250	- 2.0
	fine		+ 2.5	0.177	- 1.5
			+ 3.0	0.125	- 3.0
	very fine		+ 3.5	0.088	- 3.5
			+ 4.0	**0.063**	- 4.0
Silt					
			+ 8.0	**0.0039**	**- 8.0**
Clay					
			+ 12.0	**0.00024**	**- 12.0**

Il valore D=2 mm (ϕ = -1) separa convenzionalmente il sedimento fine (sabbia, limo e argilla) da quello grossolano (ghiaia, ciottoli e massi).

Abbiamo già visto che i logaritmi si dimostrano utili quando si deve far uso di diagrammi; nel caso di sedimenti clastici l'uso dei logaritmi nella costruzione di diagrammi è ancora più evidente, perché serve a rappresentare in modo facilmente comprensibile la composizione granulometrica di tali sedimenti.

Si noti come un la **variazione in termini aritmetici** all'interno di una classe vari a seconda della classe stessa: da –1 a –2 significa da 2 a 4 mm (una differenza poco percettibile), da –10 a –11 vuol dire da 1024 a 2048 mm (cioè da 1 a 2 metri !!!)
Questo rende consigliabile di analizzare un campione che presenti pezzature grossolane usando almeno classi di 0.5 φ **,** allo scopo di non raggruppare in poche classi elementi altrimenti molto diversi diametricamente, con relativa diversa importanza dal punto di vista idraulico ed ambientale.

Attraverso i diagrammi risulta pertanto comodo analizzare le caratteristiche granulometriche del sedimento e quindi risalire all'ambiente di formazione e alla natura dei clasti.
In particolare le curve granulometriche sono di due tipi:

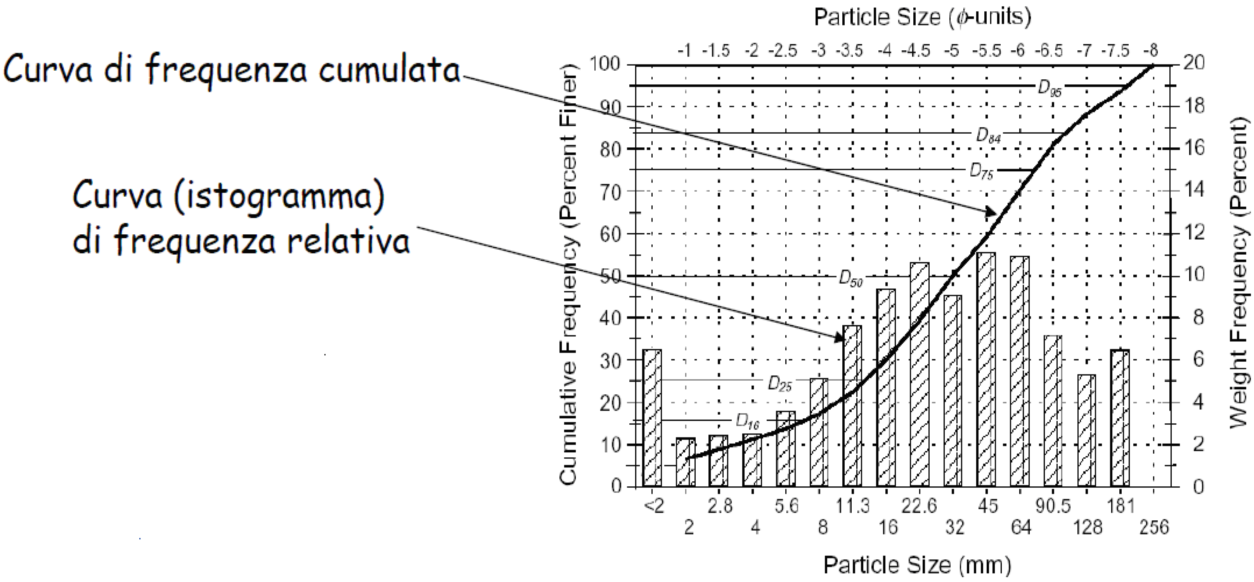
- *Curve di frequenza relativa (f)*

Per ogni classe diametrica, esprime la sua percentuale rispetto al totale del campione.
Ha un andamento di solito a campana, ma può presentare più di un valore modale (più picchi), indicativi della presenza contemporanea di diverse frazioni granulometriche tra di loro disgiunte.
In termini analitici, rappresenta la derivata della curva di frequenza cumulata.

- *Curve di frequenza cumulata (F)*

Rappresenta la percentuale – riferito al totale del campione – del sedimento più fine (detto anche passante) relativamente ad ogni classe diametrica.

Se si riportano allora, sull'asse delle ascisse, i valori limite delle classi granulometriche dei clasti esaminati e sull'asse delle ordinate le quantità, espresse ad esempio in percentuale, del peso del sedimento delle varie classi, si ottiene in questo caso è un grafico discontinuo a gradini, detto **istogramma**.
Se l'asse delle ascisse viene suddiviso in segmenti proporzionali ai logaritmi dei valori limite che individuano le classi granulometriche, invece che ai valori stessi, si ottiene il risultato di mantenere equidistanti i valori numerici fra le classi granulometriche successive e nel diagramma compare una serie di rettangoli le cui basi sono tutte uguali e le cui altezze proporzionali alla quantità dei clasti compresi nella classe granulometrica considerata.
Nell'immagine seguente è riportata un tipico istogramma basato sui valori limite della scala di Udden-Wentworth.



Se venissero invece posti, sull'asse delle ascisse, i valori reali dei clasti, si otterrebbero rettangoli con le basi di dimensioni diverse e l'analisi del diagramma non sarebbe più così agevole e immediata.

- *Le magnitudini stellari*

Non vi è campo delle scienze naturali in cui non si faccia uso dei logaritmi per descrivere qualche fenomeno relativo a quello specifico settore di studio. In astronomia, ad esempio, lo splendore delle stelle viene valutato in termini logaritmici attraverso le cosiddette “classi di grandezza” o, con termine moderno, "magnitudini".
Dagli antichi Greci abbiamo mutuato il criterio di suddividere le stelle in classi di grandezze. Due secoli prima di Cristo Ipparco di Nicea, uno dei più grandi astronomi dell’antichità, suddivise le stelle a seconda del grado di luminosità in sei classi di grandezza, ponendo nella prima le più fulgide, cioè quelle che la sera appaiono in cielo per prime, un po’ dopo il tramonto del Sole; nella seconda classe, quelle che si rendono visibili quando il cielo è un po' più scuro e quindi, nelle classi successive, quelle con luce via via più fioca. Nella sesta classe infine vennero collocate le stelle appena visibili nelle migliori condizioni fisiche, cioè quando è notte fonda con il cielo perfettamente sereno e senza luna.
Gli antichi naturalmente classificarono le stelle ad occhio nudo, quindi senza far ricorso a strumenti ottici che non erano ancora stati inventati. Essi però posero molta cura nel fare sì che l'occhio, trasferendosi da una classe all'altra, valutasse in modo sempre uguale la differenza di splendore. Per esempio, una stella di prima grandezza doveva apparire più brillante di una di seconda grandezza quanto quest'ultima lo era di una di terza e così via per le altre. E’ opportuno far notare che la scala delle grandezze stellari adottata dagli antichi è rovesciata, nel senso che le stelle di maggiore luminosità hanno magnitudine minore (una stella di prima grandezza è più brillante di una stella di seconda grandezza).
Verso la metà del diciannovesimo secolo, quando furono disponibili strumenti tecnici adeguati e metodi di misurazione raffinati, si avvertì l’esigenza di misurare con maggiore precisione e accuratezza l’intensità della luce che proviene dalle stelle. Potendo quindi disporre di dati molto precisi si procedette al perfezionamento della classificazione proposta dai Greci togliendo anche quel tanto di arbitrario e di soggettivo che era implicito nella loro formulazione. Da quel momento si preferì anche usare il termine di "magnitudine" al posto di “grandezza” al fine di evitare di collegare erroneamente lo splendore alle dimensioni di una stella. Al riguardo forse è

opportuno precisare che le stelle sono troppo lontane perché si possano valutare, al telescopio, le loro dimensioni reali.
Norman Robert Pogson, intorno alla metà dell'Ottocento, intuì che la strada giusta per affrontare il problema era quella indicata dalla **legge psicofisica di Fechner e Weber** la quale stabilisce che la intensità di una sensazione avvertita coscientemente è proporzionale al logaritmo dell'intensità dello stimolo che la produce, quindi è meno intensa di esso. Se la risposta che i nostri organi di senso danno agli stimoli fosse direttamente proporzionale alla loro intensità rischieremmo di finire in breve tempo con occhi, orecchie e gli altri organi di senso fuori uso. Essi sono invece in grado di ridurre l'intensità degli stimoli secondo il loro logaritmo quindi, mentre l'intensità dello stimolo cresce in progressione geometrica, quella della sensazione cresce solo in progressione aritmetica.
Utilizzando le proprietà delle progressioni potremmo anche dire che ad uguali differenze di sensazioni corrispondono uguali rapporti di intensità degli stimoli.
La legge di Fechner e Weber, applicata al caso delle stelle, assume la forma seguente:

$$m = k \cdot Log\ J$$

dove m (magnitudine) è l'immagine di una stella che si forma nel nostro occhio e rappresenta quindi la sensazione, mentre J è la quantità di energia luminosa che incide sul recettore, cioè è lo stimolo; k è una costante di proporzionalità il cui valore e significato verrà chiarito in seguito. Log è il simbolo del logaritmo decimale.
Pogson osservò che il rapporto fra la quantità di luce emessa da due stelle che differivano di una classe di luminosità era di circa due volte e mezzo, cioè, in pratica, l'energia luminosa emessa ad esempio da una stella di prima grandezza era di circa due volte e mezza superiore a quella emessa da una stella di seconda grandezza (teniamo sempre presente che la scala delle grandezze è rovesciata). Ora, poiché il valore di 2,5 individuato empiricamente da Ipparco è molto vicino a 2,512 che è la radice quinta di 100, Pogson scelse proprio questo valore come "ragione" della progressione geometrica che avrebbe dovuto individuare i valori di luminosità relativi alle nuove classi di magnitudine stellare.
In una progressione geometrica, come si ricorderà, il rapporto fra ciascun termine e il suo precedente è un numero fisso che rappresenta quello che viene chiamato la ragione della progressione: ebbene in questo caso si tratta di scrivere una progressione geometrica di ragione 2,512. Quindi, se assegniamo il valore 1 all'intensità della luce che proviene dalle stelle molto deboli che stanno al sesto posto della scala delle magnitudini, le stelle che occupano il 5° posto producono energia 2,512 volte maggiore, e così di seguito, sempre moltiplicando il valore precedente per 2,512, nei riguardi delle stelle di magnitudine maggiore. L'intensità della luce emessa dalle stelle che occupano dal 6° al 1° posto della scala è la seguente: $2{,}512^0$, $2{,}512^1$, $2{,}512^2$, $2{,}512^3$, 2.512^4 , $2{,}512^5$ che corrispondono ai valori 1, 2,512, 6,310, 15,851, 39,818, 100,0 per le stelle rispettivamente di magnitudine 6, 5, 4, 3, 2 e 1.
L'antica classificazione assume ora un aspetto più rigoroso che può essere anche espresso attraverso la seguente formula:

$$m_1 - m_2 = - 2{,}5 \cdot Log\ (J_1/J_2)$$

Il segno negativo indica semplicemente che alle stelle più deboli viene attribuito il valore di magnitudine più alto e a quelle più luminose il valore più basso, come già precisato.
La formula di Pogson, attraverso la misura esatta dei flussi luminosi delle singole stelle, consente di andare al di là delle sei classi di grandezza considerate dagli antichi e definire anche magnitudini di valori non interi.
Inoltre, sempre con la formula di Pogson, è possibile attribuire alle stelle più brillanti, che gli antichi classificavano indiscriminatamente di 1ª grandezza, magnitudini prossime a zero e anche negative. Così a Sirio, la stella più brillante del firmamento, oggi viene attribuita magnitudine -1,46 e a Vega 0,04. La scala vale ovviamente per qualsiasi corpo che brilli in cielo, e quindi non solo per le stelle. Venere, ad esempio, al momento del suo massimo splendore, ha magnitudine -4,4; la Luna piena è un astro di magnitudine -12,7 e il Sole ha magnitudine -26,7.

- *Le scale sismiche*

Esiste un altro settore del sapere scientifico che ricorre al concetto di magnitudine per quantificare l'energia che si libera in seguito ad un evento naturale: si tratta della sismologia la quale classifica i terremoti utilizzando il termine latino di "magnitudo" , ovvero grandezza.
Fin dai primordi della sismologia (dal greco *seismòs* che significa "scossa") la determinazione dell'intensità di un terremoto rappresentò un problema di non facile soluzione. In un primo momento, nell'impossibilità di pervenire ad una classificazione oggettiva del fenomeno per mancanza di adeguati strumenti di misura, la forza dei terremoti veniva determinata osservando i danni che questi provocavano sulla superficie del terreno e soprattutto sulle opere realizzate dall'uomo. Questo modo di procedere era, ovviamente, molto approssimativo e legato a valutazioni personali che non potevano portare se non ad una stima sommariamente qualitativa dell'evento sismico.
Nel 1897 il sismologo italiano Giuseppe Mercalli (1850-1914) tentò di dare razionalità e universalità alla scala dei terremoti basata sugli effetti che questi producevano sulle persone, sui manufatti e sul terreno. La scala di Mercalli ebbe successo ed ancora oggi è molto usata. Essa, tuttavia, più che fornire un dato sull'intensità del terremoto fornisce una misura della gravità dei danni prodotti. Questi, come è ovvio, non dipendono solo dall'energia liberata all'ipocentro, cioè nel luogo in cui si origina il sisma, ma anche e soprattutto dalle condizioni geografico-economiche della zona colpita, nonché dal suo grado di urbanizzazione e dal tipo ed età delle costruzioni presenti.
La scala di Mercalli, all'inizio, comprendeva dieci gradi di intensità, ma successivamente fu portata a 12. L'undicesimo grado fu aggiunto dallo stesso Mercalli dopo il terremoto di Messina del 1908, mentre l'aspetto definitivo fu raggiunto nel 1956 per opera di vari sismologi. La scala di Mercalli, o come meglio attualmente viene chiamata, la **"Scala di Mercalli Modificata" (scala M.M.)**, è di tipo empirico e pertanto priva di reale valore scientifico.
Per dare alla classificazione dei terremoti una valenza scientifica fu indispensabile trovare un sistema per misurare l'energia che si libera al momento dell'evento sismico. Allo scopo vennero sistemati, in diversi punti della superficie terrestre, strumenti adeguati in grado di registrare il fenomeno. In seguito a queste misurazioni nacque la **cosiddetta "Scala delle magnitudo" ideata dal geofisico americano Charles Francis Richter** nel 1935.
Il valore della magnitudo di un terremoto si determina confrontando l'ampiezza delle oscillazioni registrate dal sismografo e quella prodotta, sullo stesso strumento, da un terremoto campione. Come riferimento Richter scelse un terremoto che produce su un particolare tipo di sismografo (il sismografo a torsione di Wood-Anderson), posto a 100 km dall'epicentro (il punto della superficie terrestre posto sulla verticale dell'ipocentro), un sismogramma con oscillazione massima di un millesimo di millimetro (0,001 mm).
Per poter quindi confrontare l'ampiezza di un terremoto qualsiasi con quella del terremoto standard è indispensabile calcolare il valore di quest'ultimo a distanze dall'epicentro diverse da 100 km e registrate da sismografi di altro tipo da quello preso a campione. Questi valori sono stati calcolati, una volta per tutte, tenendo conto che l'attenuazione (o l'accentuazione) delle onde che si verificano a varie distanze dalla sorgente, dipendono anche dal tipo di terreno che attraversano. Ogni stazione sismica oggi è quindi in possesso di una tabella con i valori del terremoto campione già determinati in relazione a diverse distanze, al tipo di terreno e al sismografo operante.
Poiché l'ampiezza massima di un forte sisma, registrata su un sismogramma, può essere anche milioni di volte maggiore di quella di un terremoto debole, al fine di evitare numeri molto grandi, ***Richter propose di ricorrere ai logaritmi di base 10***.
La magnitudo di un terremoto può essere quindi definita come la misura logaritmica dell'energia liberata. Il logaritmo di base 10 del rapporto fra l'ampiezza massima del terremoto misurata sul sismogramma e l'ampiezza che verrebbe prodotta dal terremoto standard alla stessa distanza rappresenta il valore della magnitudo di quel determinato evento sismico. Nell'esempio fatto in precedenza in cui il rapporto fra le ampiezze era 100, la magnitudo sarebbe stata 2. Infatti, come ben sappiamo, il logaritmo di base 10 di 100 è 2.

La magnitudo M di un terremoto può essere ricavata dalla seguente formula:

$$M = Log\ A - Log\ A_0$$

dove A rappresenta l'ampiezza massima delle onde sismiche relative al terremoto considerato e A_0 indica il valore massimo dell'ampiezza delle onde sismiche del terremoto campione.
La scala della magnitudo è aperta ad entrambi gli estremi in quanto non ha un valore massimo, né minimo, e può anche assumere valori negativi. Sinora la massima magnitudo registrata è stata di poco superiore a 9 e si riferisce al terremoto che sconvolse il Cile nel maggio del 1960. Ma gli strumenti più sensibili sono in grado di registrare microsismi di magnitudo fino a –3: si tratta di scosse estremamente deboli che liberano quantità di energia insignificanti.
Poiché la scala delle magnitudo, come abbiamo visto, è logaritmica, un aumento di un'unità nella magnitudo, corrisponde ad un aumento di un fattore 10 nell'ampiezza del movimento del terreno e ad una liberazione di energia circa 30 volte maggiore. Così, ad esempio, un terremoto di magnitudo 5 produce vibrazioni 10 volte più ampie di un terremoto di magnitudo 4 e libera una quantità di energia 30 volte maggiore di questo.
L'energia liberata da un terremoto non è derivabile direttamente dal valore di M, tuttavia esistono delle formule empiriche che consentono di correlare l'energia liberata con la magnitudo.
Una di queste relazioni, che si adatta abbastanza bene per l'Italia, è la seguente:

$$Log\ E = 5 + 1{,}5\ M$$

dove E è l'energia totale espressa in joule e M è la magnitudo.
Come già precisato la magnitudo è una misura strumentale del terremoto, mentre l'intensità secondo la scala Mercalli si riferisce agli effetti provocati dallo stesso e quindi non è una caratteristica di quel dato evento sismico. Nonostante la differenza concettuale del modo di valutare i terremoti, è ragionevole pensare che all'aumentare della magnitudo aumenti anche l'entità degli effetti. Deve esistere quindi una relazione tra magnitudo e intensità riferibile almeno alle zone abitate.
Per l'Italia centro-settentrionale vale la seguente relazione empirica:

$$M = 0{,}45\ I + 1{,}9$$

in cui M è la magnitudo della scala Richter e I è l'intensità massima della scala M. M.

- *<u>Il PH</u>*

Il logaritmo più famoso che si incontra nello studio delle scienze naturali, quello di cui ha sentito parlare anche la gente comune, è senza dubbio il pH. Questo è un simbolo che si usa in chimica per indicare la maggiore o minore acidità delle soluzioni acquose.
Sørensen propose il nome pH: dove p sta per potenza (cioè esponente del 10) e H sta per idrogeno.
Oggi il pH viene definito come il logaritmo negativo, in base 10, della concentrazione molare degli ioni idrogeno. Pertanto:

$$pH = -\ Log\ [H^+]$$

…e l'elenco di fenomeni naturali che possono essere efficacemente modellati con funzioni esponenziali o logaritmiche potrebbe ancora proseguire…

Questi sono gli esempi che ho ritenuto potessero meglio rappresentare la capacità di semplificare lo studio e la rappresentazione dei fenomeni analizzati propria delle funzioni esponenziali e logaritmiche, esempi anche vicini alla realtà dei ragazzi cui la lezione è rivolta.