Matematica&Realtà

Percorsi di sperimentazione didattica

PERCORSO B

Introduzione al linguaggio matematico della realtà

Media a scuola e nel quotidiano

Equazioni e disequazioni elementari

Matematica&Realtà

Percorsi di sperimentazione didattica

Percorso B

Introduzione al linguaggio matematico della realtà

Media a scuola e nel quotidiano
Equazioni e disequazioni elementari

Primo Brandi Anna Salvadori

Dipartimento di Matematica e Informatica – Università degli Studi di Perugia

Premessa

I modelli matematici entrano a scuola … M&R li prende per mano

Le recenti indicazioni ministeriali sui nuovi curricula della Scuola Superiore hanno ribadito con forza la necessità di una *svolta* nell'insegnamento della matematica.
Il profilo generale delle competenze in matematica per il "nuovo" liceo scientifico inizia con queste parole: *Al termine del liceo lo studente dovrà padroneggiare i principali concetti e metodi di base della matematica, sia aventi valore intrinseco alla disciplina, sia connessi all'analisi di fenomeni del mondo reale.*
e prosegue
Dovrà inoltre possedere i primi elementi della modellizzazione matematica… conoscere il concetto di modello matematico e la specificità del rapporto che esso istituisce tra matematica e realtà.
Le linee guida per i "nuovi" tecnici e professionali pongono come obiettivo fondamentale *l'acquisizione di strumenti matematici necessari per la comprensione delle discipline scientifiche e per poter operare nel campo delle scienze applicate*
e prescrivono di proporre (sin dal primo biennio)
problemi collegati con altre discipline e situazioni di vita ordinaria, come primo passo verso la modellizzazione matematica.

Dopo lo *shock* prodotto dalle indagini OCSE-PISA, anche le prove INVALSI sono sempre più orientate verso problematiche tratte dall'esperienza quotidiana.

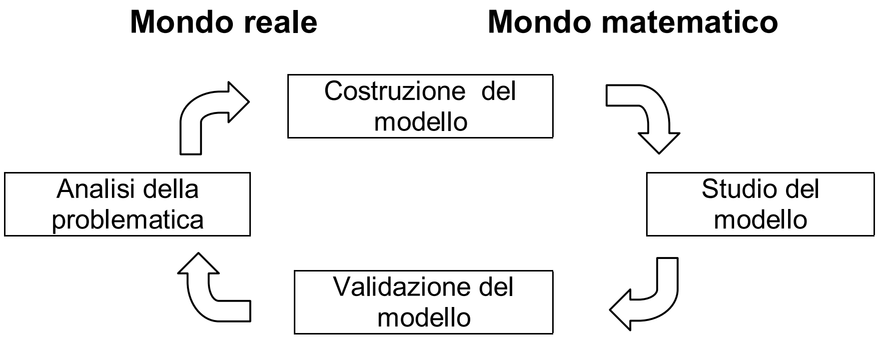
Una direzione per il rinnovamento: educare alla modellizzazione

Matematica&Realtà, cha da lungo tempo promuove l'interazione dinamica fra mondo reale e mondo matematico come *motore* per un profondo rinnovamento dell'insegnamento-apprendimento della matematica, accoglie con soddisfazione questa importante inversione di rotta e mette a disposizione della comunità matematica il materiale e il know-how acquisito in oltre quindici anni di sperimentazione sul campo (http://www.matematicaerealta.it).

Educare alla modellizzazione comporta un modo diverso di proporre lo studio della Matematica, rivolto alla descrizione e comprensione del mondo reale.

Il modello matematico

Il modello matematico di un “fenomeno” del mondo reale è un processo di razionalizzazione ed astrazione che consente di analizzare il problema, descriverlo in modo oggettivo e formulare una sua “simulazione”, utilizzando un linguaggio simbolico universale.
Il processo di modellizzazione procede per fasi successive, che creano un’interazione dinamica fra mondo reale e mondo matematico.



Fasi del processo di modellizzazione

Fase 1. Analisi della problematica. Si prende in esame la problematica in oggetto e si cerca di stabilire quali siano i dati noti e quali quelli incogniti. Si individuano eventuali legami tra le variabili in gioco e/o eventuali vincoli imposti dalla situazione.

Fase 2. Costruzione del modello. Dopo aver eventualmente semplificato il problema da affrontare (es. eliminando alcune variabili o scomponendo il problema in sotto-problemi) si traduce la questione in relazioni matematiche tra i dati e le incognite.

Le prime due fasi costituiscono il passaggio dal mondo reale al mondo matematico: il problema o il fenomeno da analizzare vengono “tradotti in linguaggio” matematico (modello).

Fase 3. Studio del modello. La fase si svolge tutta all’interno del mondo matematico con l’elaborazione del modello. Si discute e (se possibile) si risolve il modello matematico. Importante distinguete i tre aspetti: esistenza, unicità, calcolo delle soluzioni (esatto o approssimato)

La costruzione e lo studio del modello promuovono un’analisi critica del problema che porta a formulare giudizi, valutare possibili soluzioni e/o fare previsioni sulla evoluzione futura.

Fase 4. Validazione del modello. Dal mondo matematico, si torna al mondo reale per confrontare la soluzione del modello con il problema iniziale. Questo raffronto è fondamentale in quanto consente di valutare la *bontà* del modello, cioè di stabilire se il modello è rispondente alle esigenze della problematica in oggetto.

Se la verifica dell’impatto con la realtà delle soluzioni trovate “a tavolino” rivela delle inadeguatezze, si può procedere a un secondo processo di modellizzazione, che tenga conto delle questioni emerse nel primo tentativo. Si individua così un modello più adatto a gestire il problema in esame.
Successivi perfezionamenti o varianti conducono ad un prototipo virtuale via via più efficiente. Questa progressiva evoluzione richiede in genere strumenti e tecniche matematiche sempre più complessi e articolati.

Potenzialità della modellizzazione

Grazie all'astrazione matematica, uno stesso modello è in grado di rappresentare fenomeni, anche in ambiti molto diversi. Inoltre strumenti e tecniche possono essere adattati e/o assemblati per gestire nuove problematiche, un po' come si fa con le costruzioni Lego, in cui pochi elementi base permettono di realizzare una grande varietà di strutture, anche molto complesse. E' in questa duttilità e generalità che risiede gran parte della potenza del processo di modellizzazione.

Modellizzazione e strategie didattiche

Visti gli spazi sempre più esigui riservati all'insegnamento della matematica, non è proponibile una educazione alla modellizzazione *come scoperta*, ma la si può guidare come *bisogno intellettuale*. Ricorrendo alle collaudate tecniche di marketing, gli insegnanti dovrebbero far nascere negli studenti, di volta in volta, "nuovi bisogni di curiosità intellettuale" per poi *guidarli* sulla *via della loro soddisfazione*.
La stessa dinamica della modellizzazione dovrebbe guidare il percorso di insegnamento-apprendimeto.

Fasi 1-2 Partendo da situazioni e problematiche della realtà, con l'obiettivo della loro formalizzazione matematica (modello), si possono introdurre in modo naturale concetti e strumenti matematici

Fase 3 che vengono acquisiti e testati nella fase dello studio del modello matematico.

Fase 4 La fase di validazione del modello consente di perfezionare gli strumenti, riflettere sulla teoria e far emergere nuove esigenze.

A sua volta, l'acquisizione di strumenti matematici sempre più potenti permette di affrontare problemi più complessi o di operare una "rilettura" di quelli già affrontati.

ping-pong In questo modo, come in un gioco a ping-pong tra mondo reale e mondo matematico, il percorso si evolve in un'elica ascendente.

Alcune raccomandazioni ai Docenti

L'esperienza maturata negli ultimi 15 anni, prima con i percorsi Orientamatica[1] successivamente nei laboratori Matematica&Realtà, nonché nei nostri corsi universitari, ci induce a formulare alcuni suggerimenti per i Colleghi che intendono intraprendere il percorso di educazione alla modellizzazione.

Intuizione e forma-lizzazione Introdurre i concetti privilegiando un approccio intuitivo e costruttivo, per passare solo in un secondo tempo alla formalizzazione rigorosa ed alla trattazione della teoria.
Incoraggiare gli studenti a proporre loro stessi definizioni e a costruire dimostrazioni.

4 aspetti Strumenti e tecniche dovrebbero essere presentati avvalendosi di quattro aspetti: la descrizione verbale (linguaggio naturale), la rappresentazione qualitativa (aspetto grafico-geometrico), la valutazione quantitativa (aspetto numerico), la formalizzazione simbolica (linguaggio matematico).
Le rappresentazioni multiple incoraggiano gli studenti a riflettere sul significato di quanto viene loro proposto.

Problemi veri Si raccomanda di proporre **solo problemi veri**, non verosimili!
Le problematiche saranno tratte dalle mille proposte offerte dalla vita quotidiana (reperibili attraverso giornali, TV, internet, depliants pubblicitari, …) presentati nel loro contesto originale, né adattati, né semplificati, al fine di consentire una corretta educazione alla modellizzazione.

Esercizi intelligenti Ridurre al minimo gli esercizi di routine, privilegiando le questioni che richiedono il

---

[1] Corsi di formazione, orientamento e auto-valutazione rivolti a studenti del triennio degli Istituti Superiori con lo scopo di integrare la formazione scolastica proiettandola verso gli studi post-diploma e contemporaneamente favorire l'inserimento del mondo del lavoro o promuovere un orientamento consapevole alla scelta universitaria.

coinvolgimento dello studente ed invitano alla riflessione.

Atteggiamento studenti

Le parole chiave del percorso di apprendimento sono: *esplorare*, *comprendere*, *comunicare*. Gli studenti dovrebbero essere incoraggiati a scrivere e leggere argomentazioni matematiche, discutere e riflettere sui concetti, confrontare strumenti e tecniche.
In ogni fase del percorso di apprendimento dovrebbero essere in grado di riflette su *cosa stanno facendo*, *perché lo fanno* e *cosa si aspettano che accada*.

Nuove tecnologie

Le nuove tecnologie offrono un importante strumento educativo non solo perché, sollevando dagli aspetti più tecnicistici, permettono di dedicare più tempo alla comprensione dei concetti, ma anche perché pongono i ragazzi di fronte a difficoltà ed imprevisti che, se gestiti in modo consapevole e riflessivo, costituiscono un'occasione preziosa di crescita culturale.

La nostra esperienza ha evidenziato che ancorare l'insegnamento della matematica alla vita reale, oltre a stimolare l'interesse, favorisce la partecipazione attiva e responsabile, sviluppa un'attitudine sperimentale nei confronti della matematica, rende consapevoli delle potenzialità del linguaggio matematico e permette di valutare le proprie conoscenze, abilità e competenze.

Percorso B

Media a scuola e nel quotidiano [B1]

Destinatari: **Scuola Secondaria di II grado (I biennio)**
Nuclei tematici: Le relazioni, Il numero
Nuclei di processo: Risolvere e porsi problemi, Argomentare e congetturare

Dal mondo reale al mondo matematico

Partendo dal mondo reale, allo scopo di comprendere fenomeni e/o affrontare problematiche, introduciamo alcuni strumenti matematici.

Iniziamo da alcune esperienze della *vita reale* (quotidiani, depliants pubblicitari, cataloghi, …) che ci servono per riflettere sulle concetto di media.

L'argomento si presta a diversi livelli di approfondimento.
La media aritmetica, un concetto matematico elementare ampiamente diffuso nella pratica quotidiana che, a nostro avviso, merita una attenta riflessione per evitare fraintendimenti ed errori.
.
Iniziamo con un paio di esempi tratti dai media

La media nel quotidiano

Il concetto di media interviene nei campi più svariati della vita reale, basti pensare che digitando *media* su Google, si ottiene oltre un miliardo e mezzo di voci!
Proponiamo alcuni esempi.

B1.1 Allarme innalzamento temperatura terrestre

Secondo i dati del NOAA (National Oceanic and Atmospheric Administration), il servizio meteorologico e climatologico degli USA, la temperatura media globale della superficie (terrestre e marina) è aumentata di circa 0.7 gradi dal 1901 ad oggi, con una tendenza pari a 0,64 gradi per secolo.
In Italia , dal 1979 ad oggi la temperatura media è cresciuta alla velocità di 2,5 gradi per secolo, cioè quasi 4 volte la tendenza globale dell'ultimo secolo.
[Fonte: www.ncdc.noaa.gov]

B1.2 Mercato immobiliare

Nel 2007 si registra per la quotazione media nazionale degli immobili residenziali una crescita del 25,5 % rispetto la quotazione media del 2004. Nell'ultimo anno la variazione è stata del 6,1 % con un valore medio di un immobile residenziale che sale a 1.536 €/mq nel 2007 contro 1.448 €/mq del 2006.
[Fonte www.mondocasablog.com]

B1.3 FIAT ancora prima della classe

Secondo un'indagine di Jato Consult (leader mondiale della ricerca nel campo automobilistico) sulle emissioni di CO_2 in Europa, nel 2008 per il secondo anno consecutivo la FIAT ha registrato il <u>valore medio</u> più basso di emissioni di CO_2 con 133,7 g/km. Tutte le protagoniste della top ten hanno ottenuto una riduzione sulle loro emissioni di CO_2 rispetto al 2007 (in media 5,3 g/km). In particolare il miglioramento di BMW è stato eccezionale, con una riduzione di 16 g/km.
L'associazione costruttori europei (Acea) si era data l'obiettivo di ridurre la media di emissioni di CO_2 a 140 g/km entro il 2008. Il prossimo traguardo è stato fissato per il 2015 e sarà 130 g/km.
[Fonte: Quattroruote 27.2.2009]

Marca	**Media CO_2 (g/km) 2008**
FIAT	133.7
Peugeot	138.1
Citroen	142.4
Renault	142.7
Toyota	144.9
Ford	147.8
Opel	151.1
Volkswagen	158.8
BMW	160.0
Mercedes	185.0

La FIAT 500 Aria, presentata al salone di Ginevra 2008, che emette solo 98 g/km di CO_2.

Lettura *matematica* delle informazioni

Per apprezzare appieno la performance di FIAT potremmo confrontarla con l' **emissione media** delle prime dieci case automobilistiche. L'emissione media si può calcolare valutando la **media delle emissioni medie**:

$$\frac{1}{10}(133.7+138.1+142.2+142.7+144.9+147.8+151.1+158.8+160.6+185)=150,51$$

quindi le emissioni medie di FIAT sono inferiori di circa 17 punti rispetto la media, pari all' 11%.

La media a scuola

Gli studenti conoscono molto bene questo concetto non fosse altro perché si esercitano a calcolare la media dei loro voti … e spesso polemizzano con i docenti sull'arrotondamento o l'approssimazione della stessa allo scopo di spuntare il miglior risultato!

Consideriamo la pagella di Stefania, una ragazza che lo scorso anno frequentava la classe seconda del Liceo Scientifico, indirizzo tradizionale.

materia	**Voto (in decimi)**
Lingua e lettere italiane	8
Lingua e lettere latine	9
Lingua e lettere straniere	8
Storia	9
Scienze naturali-chimica	8
Matematica	9
Disegno e storia dell'arte	8
Educazione fisica	9
Condotta	10
Totale	**78**

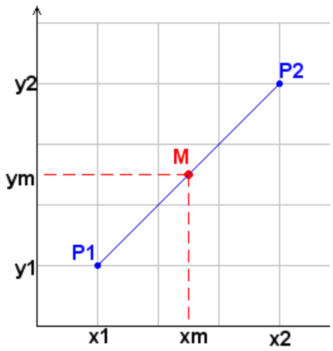
La media conseguita da Stefania è $m=\frac{78}{9}=8,\overline{6}$.

Quesito 1. Stefania, migliorando il voto in una sola materia, avrebbe potuto raggiungere la media di $8,8$.

Quesito 2. Quale miglioramento della votazione le avrebbe permesso di raggiungere la media del nove?

Un altro esempio “*scolastico*” è il **punto medio** di un segmento

B1.4 Punto medio di un segmento



Consideriamo un segmento di estremi

$$P_1 = (x_1, y_1), \quad P_2 = (x_2, y_2)$$

Il punto $M = (x_m, y_m)$ che divide il segmento in due parti uguali, cioè tale che $\overline{P_1M} = \overline{MP_2}$, è detto punto medio (vedi immagine a lato):

$$\begin{cases} x_m - x_1 = x_2 - x_m \\ y_m - y_1 = y_2 - y_m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_m = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ y_m = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}$$

In altre parole le coordinate del punto medio

Coordinate punto medio

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

si ottengono come media aritmetica delle coordinate degli estremi.

Tutti gli esempi presi in esame hanno in comune il concetto di media aritmetica.

Una pillola di teoria

Media aritmetica semplice

La **media aritmetica** di n dati $a_1, a_2, \dots, a_n$ è il rapporto fra la somma dei dati e il loro numero

$$\overline{a} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

Adottando il simbolo di sommatoria, si può scrivere più sinteticamente

$$\overline{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}$$

E’ immediato provare che

$$\min\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \le \overline{a} \le \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

Usiamo il modello

Ora che abbiamo "focalizzato" il modello, possiamo affrontare con maggior consapevolezza alcune situazioni della quotidianità che coinvolgono il concetto di media.

B1.5 Sconto Galaxy Pizza

Lo slogan di *Galaxy Pizza* è *Risparmia con qualità*. Ogni 5 pizze offre una Margherita sottile o 2 porzioni di patatine in omaggio. Nella tabella a lato è riportato parte del listino prezzi.
Fonte: www.galaxypizza.it

Valutiamo l'omaggio come percentuale della consumazione (media).

pizze	sottile	alta
Margherita	3,80	4,30
Napoletana	4,50	5,00
Francescana	4,90	5,50
Galattica	5,10	5,90
Marinara	3,10	3,90
Quattro stagioni	4,90	5,50
Rucola	4,40	5,00
Tricolore	5,50	6,30
patatine	1,80	

Svolgimento

Valutiamo il costo medio di una pizza sommando tutti i prezzi e dividendo il risultato per 16 (numero delle alternative possibili). Il risultato dell'operazione è pari a $4,85\,€$, pertanto la spesa (media) per l'acquisto di 5 pizze è di $24,25\,€$

Dai dati sintetizzati nella tabella a lato, applicando due opportune proporzioni, si ottiene il risultato:

	€	%
Spesa 5 pizze	24,25	100
Offerta patatine (2 porz.)	3,60	p
Offerta pizza margherita	3,80	m

- offerta patatine $p:100=3,6:24,25 \quad \Rightarrow \quad p\cong 14,84$
  equivale ad un omaggio di circa il 15%
- offerta pizza Margherita $m:100=4,3:24,25 \quad \Rightarrow \quad p\cong 17,73$
  equivale ad un omaggio di circa il 18%

Risposta al quesito

In conclusione, l'omaggio oscilla fra il 15% e il 18%.

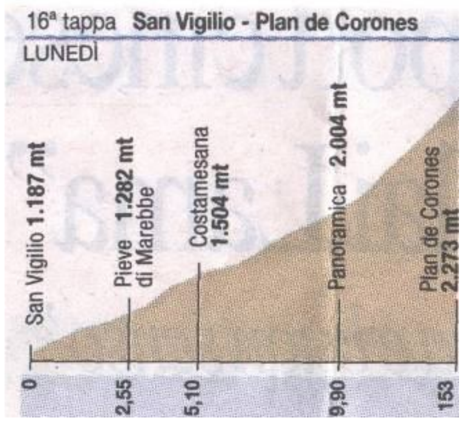
Approfondimenti

Un gruppo di amici ha deciso di cenare alla Galaxy pizza, discutere come varia l'omaggio al variare del loro numero (da 5 a 15).

B1.6 Giro d'Italia

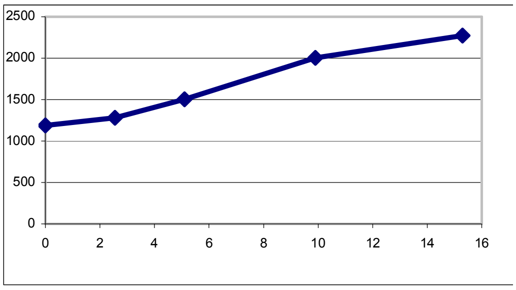
I quotidiani, in occasione di un giro ciclistico, pubblicano dei grafici che descrivono in modo chiaro la "dinamica" di ogni tappa: lunghezza ed altimetria del percorso, dislivelli e pendenze dei pendii.
L'immagine a lato illustra una tappa individuale a cronometro. Fonte: La Repubblica, 24.5.2008

località	**distanza**	**altimetria**
San Vigilio	0	1187
Bivio Pieve di Marebbe	2,55	1282
Costamesana	5,1	1504
Bivio Panoramica	9,9	2004
Plan de Coronas	15,3	2273



Rappresentazione grafica

Determiniamo la pendenza (media) del percorso in ognuno dei quattro tratti evidenziati dal grafico e riportati in tabella.



Pendenza media

La *pendenza media* è data dal rapporto fra il dislivello e la distanza sul piano orizzontale fra le due località.

Si ottiene quindi il risultato in tabella

Pendenze medie parziali

tratto	Distanza orizzontale (m)	Dislivello (m)	Pendenza	Pendenza %
1	2550	95	0,04	4%
2	2550	222	0,09	9%
3	4800	500	0,10	10%
4	5400	269	0,05	5%

Pendenza media globale

Determiniamo ora la pendenza (media) dell'intero percorso.

$$p_m = \frac{1086}{15300} \cong 0{,}07 = 7\%$$

Questione interessante

Ci potremmo chiedere: la pendenza dell'intero percorso è pari alla media delle pendenze dei singoli tratti?

E' facile verificare che (a mano dell'arrotondamento) la risposta è affermativa, infatti risulta

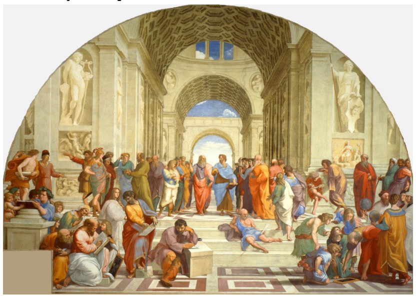
$$\frac{4+9+10+5}{4} = \frac{28}{4} = 7\,.$$

Si potrebbe pensare che questa coincidenza sia la regola, cioè la media globale sia pari alla media delle medie parziali.

Vediamo cosa accade in altre situazioni.

B1.7 Altezza media

La classe di Stefania è composta da 12 ragazze e 16 ragazzi, la cui altezza è riportata in tabella
Determiniamo l'altezza media delle ragazze e dei ragazzi (separatamente) e quella dell'intera classe.



Nome	Altezza in cm
Teresa, Lidia	160
Maria, Lucia, Mara, Laura, Angela	163
Tiziana, Stefania	166
Anna	169
Vanessa	171
Assunta	180
Alessandro	162
Lino, Valerio, Mario	165
Angelo, Stefano, Marco, Emilio, Claudio	170
Tito, Leopoldo, Mirko	173
Luigi	178
Maurizio	181
Franco, Tiziano	182

Svolgimento. Aggiungi*amo innanzitutto alla tabella la colonna delle* frequenze.

Dati ragazze

Nome	Altezza in cm	frequenza	Altezza x frequenza
Teresa, Lidia	160	2	320
Maria, Lucia, Mara, Laura, Angela	163	5	815
Tiziana, Stefania	166	2	324
Anna	169	1	169
Vanessa	171	1	171
Assunta	180	1	180
	Totale	**12**	**1987**

Dati ragazzi

Nome	Altezza in cm	frequenza	Altezza x frequenza
Alessandro	162	1	162
Lino, Valerio, Mario	165	3	495
Angelo, Stefano, Marco, Emilio, Claudio	170	5	850
Tito, Leopoldo, Mirko	173	3	519
Luigi	178	1	178
Maurizio	181	1	181
Franco, Tiziano	182	2	364
	Totale	**16**	**2749**

Siamo in grado ora di calcolare le altezze medie richieste.

altezza media ragazze

$$\frac{\textit{somma delle altezze}}{\textit{numero delle ragazze}} = \frac{1987}{12} \cong 165{,}58$$

altezza media ragazzi

$$\frac{\textit{somma delle altezze}}{\textit{numero dei ragazzi}} = \frac{2749}{16} \cong 171{,}81$$

Come era naturale aspettarsi l'altezza media delle ragazze è inferiore a quella dei ragazzi.
Valutiamo ora l'altezza media della classe

altezza media della classe

$$\frac{\textit{somma delle altezze}}{\textit{numero totale}} = \frac{1987+2749}{12+16} = \frac{4736}{28} \cong 169{,}14$$

Il risultato è un *valore intermedio* fra quelli parziali già calcolati, ci potremmo chiedere se si tratta proprio del *valore medio*.
Controlliamo

media delle altezze medie

$$\frac{165{,}58+171{,}81}{2} = 168{,}69$$

La risposta è negativa!
Analizziamo un po' più da vicino la situazione:

	Altezza media	n. studenti
ragazze	165,58	12
ragazzi	171,81	16
totale		28

Calcoliamo la *media ponderata* delle altezze medie

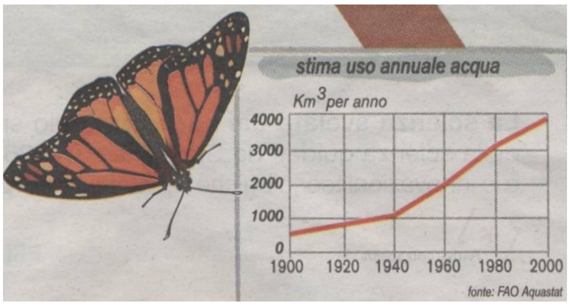
$$h_m = \frac{165{,}58 \cdot 12 + 171{,}81 \cdot 16}{12+16} = \frac{4735{,}92}{28} \cong 169{,}14$$

In conclusione l'altezza media degli studenti della classe coincide con la media ponderata dell'altezza media delle ragazze e dell'altezza media dei ragazzi.

B1.8 Consumi idrici

Il grafico a lato descrive a grandi linee l'aumento del consumo annuale di acqua nell'ultimo secolo.
Fonte: La Repubblica 6 agosto 2007

Anche ad un primo sguardo si vede bene che i consumi idrici sono *continuamente* cresciuti nel tempo. La crescita però *non è stata costante*; ad esempio, nei primi 40 anni (1900-1949) i consumi sono stati circa la metà di quelli degli ultimi 20 anni (1980-2000).



Una lettura più attenta può consentire una valutazione più accurata.

Osservazione dati

A questo proposito proviamo a riportare i dati letti sul grafico in una tabella

anno	1900	1940	1960	1980	2000
consumo (Km^3)	600	1000	2000	3100	3800

Valutiamo quindi il consumo medio del secolo e quello nei quattro periodi. Risulta

Consumo medio del secolo

$$\textit{consumo annuale medio del secolo} = \frac{3800-600}{100} = 32$$

ed analogamente si può calcolare il consumo medio nei quattro periodi:

Consumo medio nei quattro periodi

periodo	Consumo medio	Lunghezza intervallo temporale
1900-1940	10	40
1941-1960	50	20
1961-1980	55	20
1981-1999	35	20

In questo caso, la media aritmetica dei consumi medi dei quattro periodi

$$m = \frac{10+50+55+35}{4} = 37{,}5$$

è sensibilmente differente dal consumo medio del secolo. Di conseguenza, l'affermazione "la media globale è pari alla media delle medie parziali" è falsa.

Tuttavia, è possibile esprimere la media globale in funzione delle media parziali. A questo proposito, è sufficiente "espandere" anno per anno la tabella sintetica

Anno	Consumo medio annuale
1900	10
1901	10
1902	10
…	…
1940	10
1941	50
1942	50
…	…
1960	50
1961	55
…	…
1999	35

così il consumo idrico **medio nel secolo** è pari alla media aritmetica dei consumi (medi) annuali dal 1900 al 1999, ovvero

$$c_m = \frac{\overbrace{10+10+\ldots}^{40\,volte}+\overbrace{50+50+\ldots}^{20\,volte}+\overbrace{55+55+\ldots}^{20\,volte}+\overbrace{35+35+\ldots}^{20\,volte}}{100}$$

da cui

$$c_m = \frac{10\cdot 40+50\cdot 20+55\cdot 20+35\cdot 20}{100} = 10\cdot\frac{40}{100}+50\cdot\frac{20}{100}+55\cdot\frac{20}{100}+35\cdot\frac{20}{100} = 32$$

Media pesata

Osserviamo che in questa formula i consumi medi parziali (10, 50, 55, 35) sono "pesati" mediante dei coefficienti (rispettivamente 40/100, 20/100, 20/100, 20/100) che rappresentano la frazione della lunghezza dei rispettivi intervalli temporali.
Il consumo medio del secolo è quindi pari alla **media pesata** dei consumi medi parziali.
In definitiva il consumo annuale medio del secolo viene ad essere rappresentato come "media pesata" dei consumi medi parziali.

Riflettiamo sul modello

Una pillola di teoria

Media aritmetica ponderata

Assegnati *n dati* $a_1, a_2, ..., a_n$ ed *n pesi* $p_1, p_2, ..., p_n$, la **media ponderata** è definita dall'espressione

$$\overline{a}_p = \frac{a_1\cdot p_1 + a_2\cdot p_2 + \ldots + a_n\cdot p_n}{p_1+p_2+\ldots+p_n} \quad \text{o} \quad \text{sinteticamente} \quad \overline{a}_p = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i\cdot p_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}.$$

Qualora i pesi fossero tutti uguali ad 1, la media ponderata coincide con la media semplice.

Media globale e medie parziali

Siano $a_1, a_2, ..., a_n$ e $b_1, b_2, ..., b_m$ due sequenze di dati assegnati.
In forza della proprietà associativa della somma, con semplici passaggi algebrici si deduce

$$\overline{a+b} = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n+b_1+b_2+\ldots+b_m}{n+m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n+m} + \frac{\sum_{i=1}^{m} b_i}{n+m} = \frac{n}{n+m}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} + \frac{m}{n+m}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{m} b_i}{m}.$$

da cui

(*)
$$\overline{a+b} = \frac{n}{n+m}\overline{a} + \frac{m}{n+m}\overline{b}$$

In altre parole la media globale coincide con la **media pesata** delle due medie parziali, ove il peso è il rapporto fra il numero degli elementi che compaiono nella media parziale e il numero totale degli elementi presenti nella media globale.

La formula (*) si può estendere ad un numero arbitrario di sequenze.

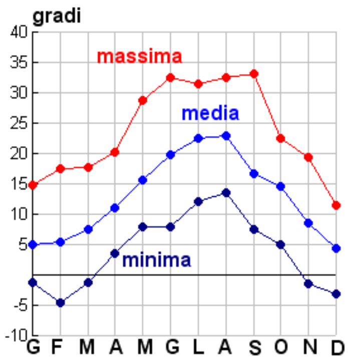
La temperatura media offre un altro interessante esempio di media pesata.

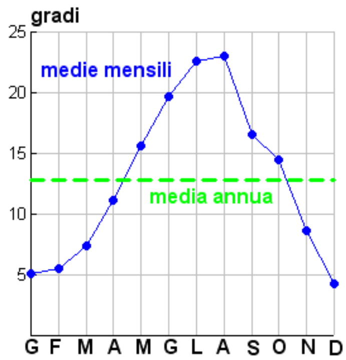
B1.9 Temperatura massima, minima, media

I bollettini meteo riportano spesso le temperature massima e minima, facendo riferimento ad anomalie rispetto la media degli ultimi anni.

Nella tabella e nei due grafici seguenti sono riportate le temperature (^0C) massime, minime, medie mensili e la media annuale registrate a Urbino nel 2008
[Fonte:Osservatorio meteorologico A.Serpieri, www.uniurb.it/meteo]

Temperatura 2008				
Mese	Massima	Minima	Media	Media*n.giorni
Gennaio	14,8	-1,2	5,1	5,1*31 = 158,1
Febbraio	17,5	-4,4	5,5	5,5*29 = 159,5
Marzo	17,8	-1,3	7,4	7,4*31 = 229,4
Aprile	20,8	3,6	11,1	11,1*30 = 333,0
Maggio	28,7	7,9	15,6	15,6*31 = 483,6
Giugno	32,4	8,0	19,7	19,7*30 = 591,0
Luglio	31,5	12,0	22,6	22,6*31 = 700,6
Agosto	32,5	13,5	23,0	23,0*31 = 713,0
Settembre	33,1	7,6	16,6	16,6*30 = 498,0
Ottobre	22,5	4,9	14,5	14,5*31 = 449,5
Novembre	19,4	-1,4	8,6	8,6*30 = 258,0
Dicembre	11,5	-3,1	4,3	4,3*31 = 133.3
Media annuale	**12,8**			**Totale 4707**





Nella tabella delle temperature abbiamo aggiunto la colonna media*n. giorni, che sarà utile in seguito.

Temperature massima minima e media

Forse qualcuno potrà sorprendersi nell'osservare che la **temperatura media mensile non coincide con la media aritmetica fra la massima e la minima**

(es. Gennaio: media fra massima e minima $=\dfrac{14{,}8-1{,}2}{2}=6{,}8$; temperatura media mensile = 5,1)

Infatti, grazie alla proprietà associativa dell'addizione, la media mensile coincide con la media aritmetica semplice delle temperature medie giornaliere del mese in esame. D'altra parte la temperatura media giornaliera è calcolata come media aritmetica di tutte le temperature misurate nel corso della giornata (fra cui la temperatura massima e quella minima giornaliera). Pertanto *le due temperature massima e minima non influiscono significativamente sulla media.*

Media pesata

La media annuale si può rappresentare come *media pesata* delle medie mensili. Ciascun peso è il rapporto fra i giorni del mese in questione e il numero dei giorni dell'anno.
Procediamo al calcolo della temperatura media annuale di Urbino nell'anno (bisestile) 2008.

$$\sum media\,mensile \cdot \frac{n.giorni\,mese}{366} = \frac{1}{366}\sum media\,mensile \cdot n.giorni\,mese = \frac{4707}{366} \cong 12.8$$

Sempre in tema di media pesata, proponiamo un approfondimento di una situazione già affrontata.

B1.10 Dal punto medio al punto mobile

Abbiamo ricordato come si calcolano le coordinate del punto medio di un segmento, ma se volessimo caratterizzare le coordinate $P(x,y)$ di un *punto che si muove* lungo il segmento, come potremmo fare?

Per determinare le coordinate del punto medio, siamo partiti dalla condizione

$$\overline{PP_1} = \overline{PP_2}$$

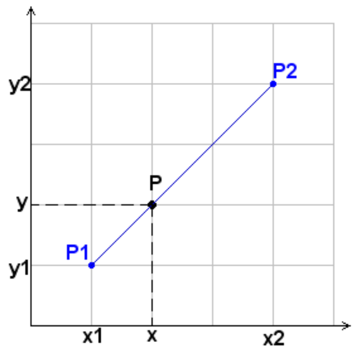
che possiamo scrivere equivalentemente

$$\overline{PP_1} = \frac{1}{2}\overline{P_1P_2} \qquad \overline{PP_2} = \frac{1}{2}\overline{P_1P_2}\,.$$

In modo analogo, nel caso di un punto variabile poniamo

$$\overline{PP_1} = a\,\overline{P_1P_2} \qquad \overline{PP_2} = b\,\overline{P_1P_2}$$

con $0 \le a \le 1 \quad 0 \le b \le 1 \quad a+b=1$.



In virtù del Teorema di Talete, considerato i due fasci di rette parallele orizzontali $x = \text{costante}$ e verticali $y = \text{costante}$ e la trasversale P_1P_2, si ottengono le relazioni

$$\overline{P_1P} : \overline{P_2P} = (x-x_1):(x_2-x) = (y-y_1):(y_2-y)$$

da cui

$$\begin{cases} (x-x_1):(x_2-x) = a:b \;\Rightarrow\; x = \dfrac{b\,x_1 + a\,x_2}{a+b} \\ (y-y_1):(y_2-y) = a:b \;\Rightarrow\; y = \dfrac{b\,y_1 + a\,y_2}{a+b} \end{cases}$$

Le coordinate del punto $P=(x,y)$ si ottengono quindi come **media pesata** delle coordinate degli estremi.

Poiché $a+b=1$, le coordinate del punto mobile si possono scrivere

$$\begin{cases} x = (1-a)\,x_1 + a\,x_2 \\ y = (1-a)\,y_1 + a\,y_2 \\ 0 \le a \le 1 \end{cases}$$

In corrispondenza ad $a=0$ si ottiene il punto P_1, mentre per $a=1$ si ottiene P_2.
Il punto medio del segmento P_1P_2 si ottiene in corrispondenza di $a=1/2$.

Torniamo su un tema già trattato: la media dei voti a scuola.

B1.11 Media alla maturità

Secondo una recente disposizione ministeriale, il voto di condotta concorre alla determinazione della media dei voti ai fini sia dell'ammissione all'esame di stato, sia della definizione del credito scolastico (O.M. 8.4.2009 n. 40).
Questa decisione ha innescato un acceso dibattito, anche sui media, circa l'influenza che il voto di condotta possa avere sull'esame di stato.
Una domanda sorge spontanea:

qual è il *peso* del voto in condotta rispetto quello delle altre materie?

Proviamo a rispondere alla questione in termini matematici.

Prendiamo come esempio un Liceo Scientifico tradizionale in cui 10 voti di profitto concorrono alla media.

Applicando la definizione si ha:

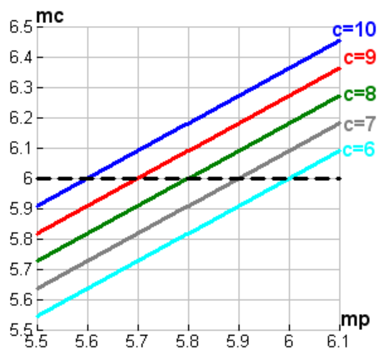
- media dei soli voti di profitto $m_p = \dfrac{somma\ voti\ profitto}{10}$
- media completa (compreso il voto in condotta c)

$$m_c = \frac{somma\ voti\ profitto + voto\ condotta}{11}$$

Distribuendo il denominatore e moltiplicando/dividendo per il fattore 10, si deduce la relazione fra le due medie

$$m_c = \frac{10}{11} m_p + \frac{1}{11} c\,.$$

Si tratta di una relazione lineare, che dipende dal voto di condotta. In *termini tecnici* si tratta di un *fascio di rette* (vedi anche immagine a lato).
Al crescere del parametro *voto in condotta* anche la media aumenta.
In particolare, il grafico mostra chiaramente che la condotta può essere determinante nel raggiungere una media sufficiente, necessaria per l'ammissione all'esame. Infatti un voto di condotta superiore o pari a 7 consente a medie in profitto oscillanti fra 5.6 e 5.9 di raggiungere o superare la sufficienza.



Ma esaminiamo la questione un po' più da vicino.

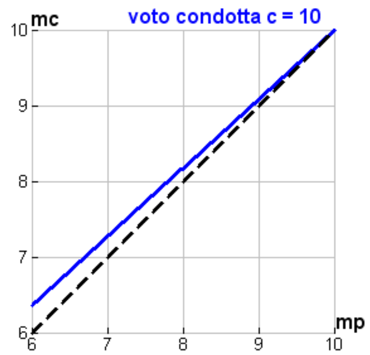
Studente modello

Studente modello c = 10: $m_c = \dfrac{10}{11}\left(m_p + 1\right)$.

Il 10 in condotta consente, ad esempio, di alzare la media da 5.6 a 6.
Poiché

$$m_p = 5.6 \quad \Leftrightarrow \quad somma\ voti\ profitto = 56$$

un ottimo comportamento può quindi "annullare" quattro insufficienze lievi (pari a 5) oppure due insufficienze gravi (pari a 4) nei voti di profitto!

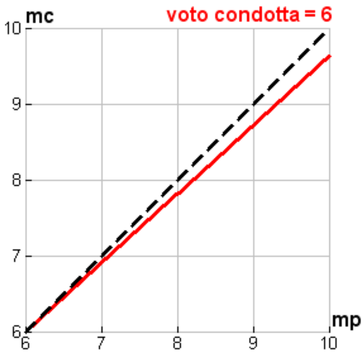


Studente discolo

Studente *discolo* c = 6:

$$m_c = \frac{10}{11} m_p + \frac{6}{11}.$$

Attenzione, un *comportamento discutibile* può penalizzare una media buona, come mostra la figura a lato.
Ad esempio il 6 in condotta abbassa la media da 8 a 7.8 comportando la regressione alla fascia inferiore.



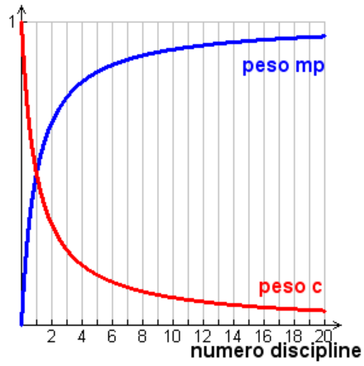
Caso generale

Più in generale, se N è il numero dei voti di profitto che concorrono alla media, si ha

$$m_c = \frac{N}{N+1} m_p + \frac{1}{N+1} c$$

In altri termini la *nuova media* (con il voto in condotta) coincide con la *media ponderata* fra la media delle materie disciplinari (peso pari a $\frac{N}{N+1}$) e il voto in condotta (peso $\frac{1}{N+1}$).

Come era naturale aspettarsi, tanto più alto è il numero delle discipline, tanto più bassa è l'influenza sulla media del voto di condotta.
Il grafico mostra come varia il peso del voto di condotta e della media disciplinare nel calcolo della media completa, in funzione del numero di discipline.



Passiamo ora ad una *nota* più leggera tratta da un gioco matematico.

B1.12 Il ciclista

Un ciclista scala una montagna alla media di $20\ km/h$; giunto in cima, gira la bicicletta e riscende a valle (seguendo la stessa strada) ad una media di $60\ km/h$.

Qual è la velocità media complessiva del ciclista?

[www.chiesi.net/home/ita/giochi.html]

Soluzione del questito

Risposta errata

La risposta *più frequente* al quesito è la media aritmetica delle due medie ovvero

$$\frac{20+60}{2}=40 \quad km/h.$$

In tal modo assumiamo implicitamente di essere in presenza di un fenomeno lineare.

Soluzione esatta

Indichiamo con v_1 e v_2 le velocità medie in salita e in discesa e con t_1 e t_2 i rispettivi tempi impiegati. Per quanto visto in alcune situazioni precedenti, la velocità media complessiva si può esprimere come *media ponderata* delle velocità v_1 e v_2

$$v_m = v_1 \cdot \frac{t_1}{t_1+t_2} + v_2 \cdot \frac{t_2}{t_1+t_2}$$

ove i "pesi" sono le frazioni temporali relative a ciascun tratto.

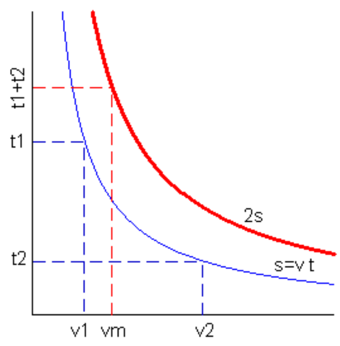
Ricavando i tempi t_1 e t_2 dalla nota relazione che fornisce lo spazio $s = v \cdot t$, risulta

$$v_m = v_1 \cdot \frac{s/v_1}{s/v_1 + s/v_2} + v_2 \cdot \frac{s/v_2}{s/v_1+s/v_2} = \frac{v_1 \cdot v_2}{v_1+v_2} + \frac{v_1 \cdot v_2}{v_1+v_2}$$

da cui, nel nostro caso, si deduce

$$v_m = 2\frac{v_1 \cdot v_2}{v_1+v_2} = 2\frac{20 \cdot 60}{20+40} = 30\ km/h$$

Il procedimento adottato per determinare v_m può essere efficacemente descritto per via grafica (vedi figura a lato).



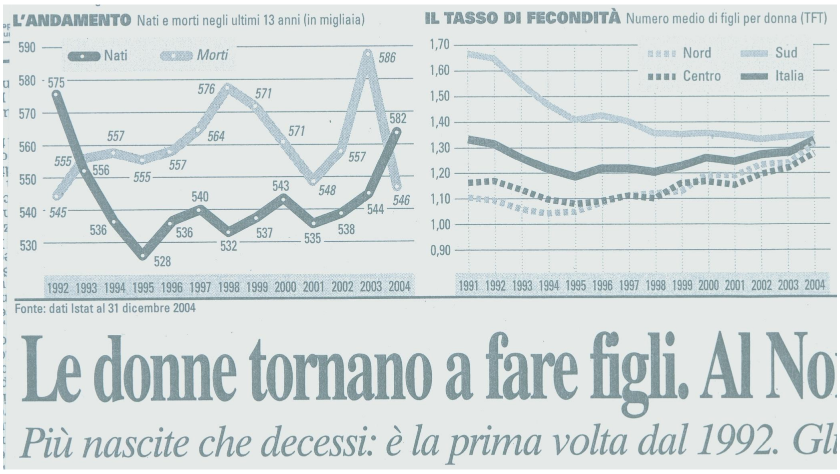
La curva blu rappresenta la legge del moto $s = v \cdot t$, la curva rossa si riferisce al percorso complessivo andata + ritorno ($2s$). Assegnate le velocità v_1 e v_2, attraverso la curva blu si determinano i tempi t_1 e t_2 come *immagini dirette*); in corrispondenza del tempo complessivo t_1+t_2, sulla curva rossa si determina v_m (come *immagine inversa*).

In definitiva si ha

$$v_m = \frac{2s}{t_1+t_2}.$$

QUESITI E MODELLI

Nascite e morti



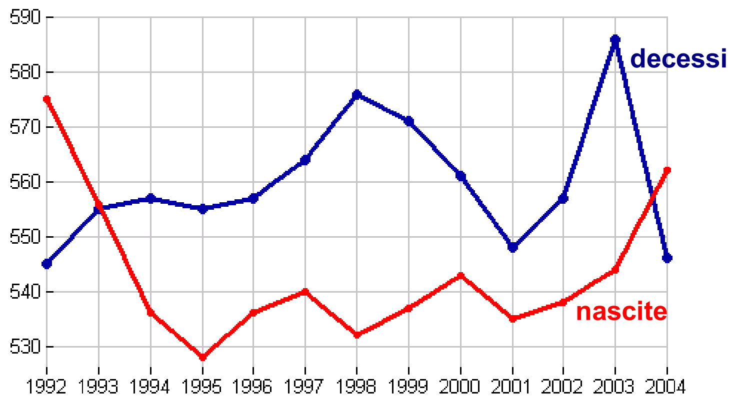
Fonte: La Nazione, 28.6.2005

Nel testo si legge:
"Un piccolo miracolo è accaduto in Italia nel 2004. Un evento di cui non si era più sentito parlare dal lontano 1992. Per la prima volta da 12 anni non solo nascono più bambini (562.599 nel 2004 con un aumento di 18.536 neonati rispetto al 2003 e per avere un dato così alto bisogna appunto risalire al 1992) ma il saldo è positivo, ovvero il numero delle nascite supera quello dei decessi."

Riportiamo nella tabella seguente i dati riportati nell'articolo (con due correzioni necessarie)

anno	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Nascite	575	556	536	528	536	540	532	537	543	535	538	544	562
Decessi	545	555	557	555	557	564	576	571	561	548	557	586	546

Costruiamo quindi i grafici corrispondenti in un opportuno sistema cartesiano



Osservando il grafico e utilizzando i dati della tabella, rispondi alle domande seguenti:

1) Il tasso di incremento delle nascite è massimo
   a. nel biennio 1995-1996
   b. nel biennio 1999-2000
   c. nel biennio 2002-2003
   d. nel biennio 2003-2004

2) Il tasso di variazione delle nascite nel periodo 2000-2004 è pari
   a. 19
   b. 538
   c. 4.75
   d. –4.75

3) Osservando la funzione delle nascite si può affermare che
   a. è crescente
   b. è decrescente
   c. la monotonia si inverte più volte dal 1992 al 2004
   d. è crescente solo a partire dal 2001

4) Osservando il grafico possiamo affermare che
   a. Il minimo delle nascite si ha nell'anno …………
   b. Il massimo dei decessi si ha nell'anno …………
   c. Il massimo decremento della popolazione si ha nel …………
   d. Gli anni …………………………sono a crescita "zero".

5) Esprimere il tasso annuale medio delle nascite nel periodo 1992-2004 come media ponderata dei tassi delle nascite nei periodi 1992-95, 1995-2000, 2000-2004

6) Esprimere il tasso annuale medio delle nascite nel periodo 1992-2004 come media ponderata dei tassi quadriennali delle nascite dal 1992 al 2004

7) Esprimere il tasso annuale medio dell'incremento (o decremento) della popolazione italiana come media ponderata dei tassi di incremento (o decremento) relativi ai periodi 1992-95, 1995-2000, 2000-2004

8) Esprimere il tasso annuale medio dell'incremento (o decremento) della popolazione italiana come media ponderata dei tassi quadriennali di incremento (o decremento) dal 1992 al 2004

Treni FCU più veloci

La Ferrovia Centrale Umbra ha elaborato per il 2007-08 un progetto che si prefigge due obiettivi: migliorare gli standard di sicurezza della rete e innalzare la velocità di tracciato, con conseguente riduzione dei tempi di percorrenza. Spesa prevista 5 ML di euro.
Nella tabella è riportato un prospetto di sintesi che illustra i miglioramenti previsti.

[Fonte: Tutto Perugia, 14.12.2006]

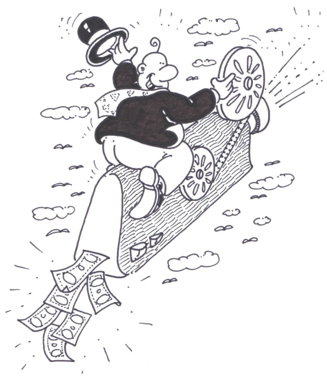
Tratta		Tempo attuale (minuti)		Tempo previsto in futuro (minuti)	
	Distanza (km)	Treno più veloce	Treno meno veloce	Treno più veloce	Treno meno veloce
PG Ponte San Giovanni - San Sepolcro	69	69	80	61	75
PG Ponte San Giovanni - Terni	79	68	75	59	69

Secondo le dichiarazioni la realizzazione del progetto comporterà un innalzamento della velocità del tracciato.
Ci chiediamo quale sia l'incremento della **velocità media** (assoluto e in percentuale rispetto quella attuale).

Mettiamo a confronto la previsione 2007-08 con i dati effettivi tratti dall'orario 2010 (vedi tabella seguente) per verificare se le "promesse" sono state mantenute.

Perugia Ponte San Giovanni - San Sepolcro		Perugia Ponte San Giovanni - Terni	
Ora partenza	Ora arrivo	Ora partenza	Ora arrivo
7.25	8.50	6.52	8.18
8.32	9.50	8.12	9.27
14.25	15.41	13.50	15.14
15.34	16.44	15.18	16.28
19.53	21.06	19.43	20.59

Incassi del cinema



“Tiene il pubblicano e aumentano gli incassi al cinema. Nel periodo 1 gennaio – 31 dicembre 2009, si sono venduti in Italia 99 milioni di biglietti (-0,30% rispetto al 2008) e si sono incassati 623 milioni di euro (+4,95%). Secondo il Presidente Anec (Associazione Nazionale Esercenti Cinema) Protti la sostanziale tenuta rispetto al pubblico e la crescita degli incassi vanno valutati positivamente. Il cinema si mantiene saldo”
[Fonte: ANSA 5.1.2010, dati Cinetel]

Sulla base di queste informazioni valutare l’aumento del *costo medio* dei biglietti.

Percorso B

Equazioni e disequazioni elementari [B2]

Destinatari: Scuola Secondaria di II grado (I biennio)
Nuclei tematici: Le relazioni, Il numero
Nuclei di processo: Risolvere e porsi problemi. Argomentare e congetturare

Dal mondo reale al mondo matematico

Iniziamo con due situazioni tratta dal quotidiano in cui le informazioni sono fornite tramite dati numerici. Affronteremo le questioni prima con un approccio aritmetico, per passare successivamente ad un approccio grafico.

B2.1 Coffee Shop

a) I clienti di un coffee shop chiedono spesso al gestore di miscelare al 50% due diversi tipi di caffé in polvere, una qualità mild con una pura arabica al 100%. Tenuto conto dei prezzi delle due qualità (cfr. tabella a lato), quale dovrebbe essere il costo della miscela?

Prezzo per 100 g (€)	
mild	5,50
pura arabica	7,20

b) Il gestore pensa di proporre una nuova miscela, venduta al prezzo di 6,50 € ogni 100 g, ottenuta mescolando le due qualità in diverse proporzioni. Quale percentuale di ciascuna delle miscele dovrà combinare?

Quesito a)
Costruzione del modello

Poiché le due polveri sono miscelate in parti uguali, il costo unitario sarà la media dei due prezzi:

$$\frac{5,50+7,20}{2}=6,35$$

Quesito b)
Costruzione del modello

Riferendoci alla confezione da 100g della nuova miscela, se denotiamo con x la quantità (in g) di qualità mild, quella della qualità arabica sarà pari a $(100-x)$.

Il *bilancio* dei prezzi conduce all'equazione

$$\frac{5,50}{100}\cdot x+\frac{7,20}{100}(100-x)=6,50$$

Soluzione esatta

la cui soluzione è

$$(7,20-5,50)x=650-720 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{70}{1,7}\cong 41,17$$

Soluzione approssimata

Per ovvie ragioni, è opportuno approssimare la soluzione arrotondandola ad un numero intero.

Il senso pratico suggerirebbe $x\cong 40$, ma un'approssimazione per difetto comporta una perdita per il gestore. Infatti il prezzo della miscela 40% mild e 60% arabica sarebbe

$$5,50\cdot\frac{40}{100}+7,20\cdot\frac{60}{100}=6,52$$

cioè 2 centesimi di euro superiore al prezzo previsto. Vendendo la miscela al prezzo previsto il gestore perderebbe 2 € ogni 10 kg di miscela.

Egli ha due alternative: aumentare il prezzo unitario oppure approssimare la soluzione per eccesso.

La seconda opzione conduce alla seguente miscela: 42% mild e 58% arabica, il cui prezzo è

$$5,50 \cdot \frac{42}{100} + 7,20 \cdot \frac{58}{100} = 6,4886 \cong 6,49$$

Con una perdita per il cliente è di solo 1 centesimo di euro a confezione.

B2.2 Tariffe cellulari

La Sig. Rossi vorrebbe cambiare il contratto del suo cellulare ed è indecisa fra le due offerte TIM. [Fonte. www.tim.it]

TIM SENZA SCATTO	
Scatto alla risposta (€)	0
Costo al minuto (€)	0,16
Tariffazione a scatti (anticipati) di 30 secondi	

TIM 12	
Scatto alla risposta (€)	0,16
Costo al minuto (€)	0,12
Tariffazione a scatti (anticipati) di 30 secondi	

Ella si pone due domande:

a) qual è l'importo di una telefonata della durata di 5 minuti?

b) quanto tempo può parlare con una ricarica di 20 €?

Quesito a) Valutiamo il costo della telefonata in relazione a ciascun piano tariffario.

Approccio numerico

Il costo della telefonata con **TIM SS** (SENZA SCATTO) è *proporzionale* ai minuti di conversazione, di conseguenza, per una chiamata di 5 minuti risulta

$$costo\,conversazione = 0,16 \cdot 5 = 0,80\,€$$

Costo in base ai minuti

Per valutare il costo della telefonata con **TIM 12** dobbiamo sommare al costo della conversazione la quota dello scatto alla risposta:

$$scatto\,alla\,risposta + costo\,conversazione = 0,16 + 0,12 \cdot 5 = 0,76\,€$$

Risposta al quesito Per una conversazione di 5 minuti è più conveniente la tariffa TIM 12, nonostante preveda lo scatto alla risposta.

Approfon-dimento

La Sig. Rossi fa altri tentativi ed ottiene i dati della tabella a lato, da cui deduce che nessuna delle due tariffe è la più economica in assoluto, in quanto la convenienza dipende della durata della conversazione.

Tempo (min)	Costo (€)	
	TIM SS	TIM 12
1	0,16	0,28
2	0,32	0,40
3	0,48	0,52
5	0,80	0,76
10	1,60	1,36
20	3,20	2,56

Costo in base agli scatti

Per capire meglio la situazione, valutiamo il costo di una telefonata di durata variabile con entrambi i piani tariffari e confrontiamo i risultati.

Poiché le telefonate sono fatturate in base agli scatti e non ai minuti di conversazione, sarà opportuno impostare la problematica dei costi in funzione degli scatti e non della durata.

Assumiamo pari ad x il numero (incognito) degli scatti e valutiamo il costo secondo ciascun piano tariffario:

Costo della telefonata con **TIM SS:** $C_{SS} = 0,08 \cdot x$

Costo della telefonata con **TIM 12:** $C_{12} = 0,16 + 0,06 \cdot x$

Osserviamo che il costo dello scatto è pari alla metà dal costo al minuto.

Punto di indifferenza

Ci chiediamo: **può accadere che il costo di una conversazione sia lo stesso anche se le tariffe sono diverse?**

Affrontare la questione equivale a studiare l'equazione

Equazione di I grado

$$C_{SS} = C_{12} \quad \Leftrightarrow \quad 0,08 \cdot x = 0,16 + 0,06 \cdot x$$

la cui (unica) soluzione è $x = 8$. In altre parole, il costo di una chiamata di 4 minuti è identico, nei due piani tariffari (precisamente 64 centesimi).
Poiché l'equazione è di primo grado, questo è il solo caso in cui i due costi coincidono (se riferiti ad una sola telefonata).

Confronto far le due tariffe

Sulla base della disequazione

$$C_{SS} > C_{12} \quad \Leftrightarrow \quad 0,08 \cdot x > 0,16 + 0,06 \cdot x$$

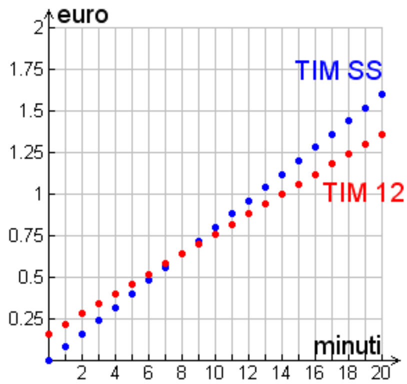
che ammette come soluzione

$$x > 8$$

Approccio grafico

possiamo affermare che per conversazioni della durata inferiore o uguale a 3 minuti e 30 secondi è più conveniente la tariffa TIM SENZA SCATTO, mentre per quelle di durata superiore a 4 minuti conviene la tariffa TIM12.

Per illustrare la situazione, possiamo avvalerci di una rappresentazione grafica, magari con l'ausilio di un file excell (cfr. grafico a lato).



Quesito b)
TIM SS risposta al quesito

Come abbiamo già osservato, la tariffa TIM SS genera costi proporzionali alla durata della conversazione, indipendenti dal numero delle chiamata. Dall'equazione

$$C_{SS} = 20 \quad \Leftrightarrow \quad 0,08 \cdot x = 20$$

la cui soluzione è $x = 250$, si deduce che ad una ricarica di 20 € consente un traffico complessivo (indipendente dal numero di chiamate) di **125 minuti**, cioè 2 ore e 5 minuti.

TIM 12 risposta al quesito

Nel caso della tariffa TIM 12 il problema è più complicato in quanto bisogna tener conto del numero di chiamate. Al costo associato alla durata complessiva delle conversazioni dobbiamo aggiungere gli scatti alla risposta (uno scatto di 0,16 € per ogni chiamata). Indicato con n il numero delle chiamate, risulta

$$n \cdot 0,16 + 0,06 \cdot x = 20$$

Si tratta di un'equazione letterale (nell'incognita x) che ammette come (unica) soluzione

$$x = \frac{20 - n \cdot 0,16}{0,06} = \frac{1000 - 8 \cdot n}{3} \text{ scatti}$$

Validazione della soluzione

Interpretiamo la soluzione ottenuta.
Poiché ad ogni chiamata, oltre allo scatto alla risposta (0,16 €) corrisponde almeno uno scatto anticipato (0,12 €), deve risultare

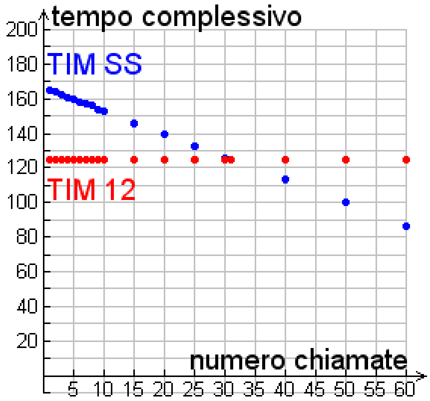
$$x \geq n \geq 1 .$$

Tabuliamo la soluzione, al variare del parametro *n* (servendoci di un file excell) adottando le formule:

$$B = \mathrm{INT}(1000 - 8 * A2)/3)$$

$$C = \mathrm{INT}(B2/2)$$

$$D = \mathrm{INT}(B2/(2 * A2))$$



A	B	C	D
n	x	tempo complessivo (min)	durata media (min)
1	330	165	165
2	328	164	82
3	325	162	54
4	322	161	40
5	320	160	32
6	317	158	26
7	314	157	22
8	312	156	19
9	309	154	17
10	306	153	15
15	293	146	9
20	280	140	7
25	266	133	5
30	253	126	4
31	250	125	4
35	240	120	3
40	226	113	2
50	200	100	2
60	173	86	1

Conclusioni Dalla tabella (cfr. anche il grafico) si deduce facilmente che una ricarica di 20 € consente

- con TIM SS un traffico complessivo di 125 minuti, indipendente dal numero delle chiamate
- con TIM 12 un traffico di 125 minuti se si effettuano 31 chiamate; si può parlare più a lungo (fino a 330 minuti nel caso di una sola chiamata) per un numero di chiamate inferiori; il tempo complessivo si riduce con più di 31 telefonate, fino a un minimo di 45 minuti in corrispondenza di 91 chiamate della durata di 1 scatto.

Proviamo ora a *leggere* e interpretare un modello già pronto.

B2.3 Peso forma

Uno studio dell'Organizzazione Mondiale della Sanità (2002) indica il soprappeso fra le cinque principali cause di morte. [Fonte. Uttp//it.wikipedia.org/wiki/Peso_forma]
Un metodo molto semplice per determinare il peso ideale di un adulto è la formula di Broca

$$peso\ ideale = altezza(cm) - 100 \pm 10\%$$

a) Valutare il peso ideale di una persona alta 1,64 m.

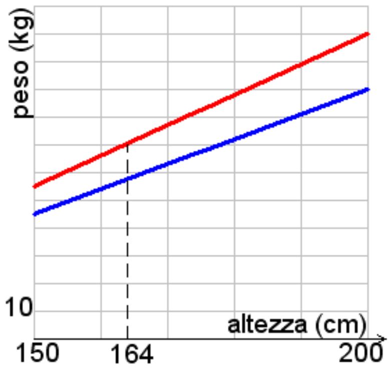
b) Determinare il range di variabilità del peso ideale in funzione dell'altezza h (assunta come parametro)

Quesito a) Inserendo nella formula l'altezza (1,64 m = 164 cm), si ottiene

$$peso\ ideale = 64 \pm 10\%$$

che rappresenta un range di valori, oscillante fra il 90% e il 110% di 64, precisamente

$$57{,}6 \div 70{,}4$$



Quesito b) Denotata con h l'altezza (in cm) e con P il peso (in Kg), la formula di Broca può essere scritta in modo più esplicito mediante due disuguaglianze

$$0{,}9(h-100) \le P \le 1{,}1(h-100)$$

B2.4 Strategia di produzione industriale ([1])

Un'industria alimentare produce due diversi tipi di confettura di ciliegie, che contengono la stessa percentuale di zucchero, ma diversa concentrazione di frutta.
La confettura A impiega 55 g di frutta ogni 100 g di confettura e viene venduta in confezioni da 330 g al prezzo di 1,98 €.
La confettura B impiega 45 g di frutta ogni 100 g di confettura e viene venduta in confezioni da 400 g al prezzo di 1,58 €.
Determinare la strategia di produzione che consente di ottenete un ricavo di almeno 250 € al quintale di frutta impiegata.

Analisi della situazione Possiamo impostare la questione in questi termini: abbiamo a disposizione 1q di frutta e dobbiamo distribuirla fra le due confetture in modo da avere un ricavo dl almeno 250 €.
Per determinare il ricavo al quintale di ciascuna confettura, calcoliamo il ricavo di 100 g: rispettivamente 0,60 € per la confettura A e 0,395 € per la confettura B.
Di conseguenza si ha

Confettura	Frutta (q) per 1 q di confettura	Ricavo € per 1 q di confettura
A	0,55	600,00
B	0,45	395,00

Costruzione del modello
Produzione

Denotata con x la quantità (in quintali) di frutta impiegata nella confettura A, per la confettura B restano $1-x$ quintali.

Riusciamo quindi a produrre $0,55x$ quintali di confettura A e $0,45(1-x)$ quintali di confettura B. Il ricavo corrispondente è pari a

Ricavo

$$R = 0,55x \cdot 600 + 0,45(1-x) \cdot 395$$

Il nostro obiettivo si traduce nella disequazione

$$R \geq 250 \quad \Rightarrow \quad (330-177,75)x \geq 250-177,55 \quad \Rightarrow \quad x \geq 0,4745$$

Risposta al quesito

In definitiva la strategia che consente di raggiungere l'obiettivo è quella di impiegare almeno 47,45 kg di frutta nella confettura A e i restanti nella confettura di tipo B.
Valutiamo la produzione di confettura (servendoci di una proporzione)

Confettura	Frutta (kg)	Confettura (kg)
A	47,45	86,27
B	52,55	116,77

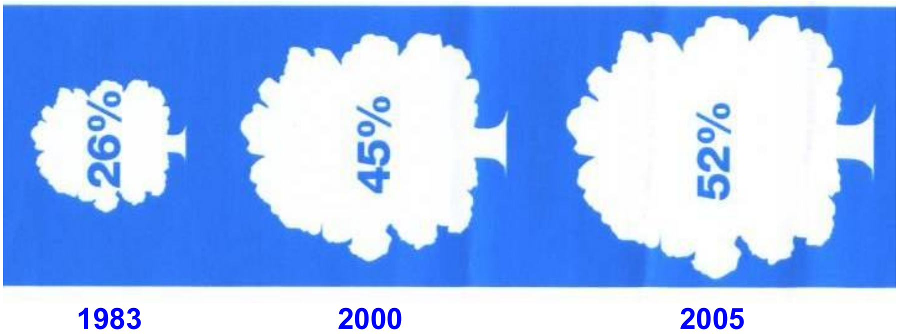
Commento

Il risultato ottenuto corrisponde a circa 262 confezioni di confettura A e 291 di confettura B.

Proponiamo ora una *rilettura* sotto una nuova luce di due situazioni che abbiamo già affrontato nei percorsi A e B.

B2.5 Foreste in crescita ([1])

Una buona notizia … In Costarica le foreste stanno ricrescendo lentamente, ma in maniera costante.
Fonte: Venerdì di Repubblica, 2.4.2008



Leggendo questa notizia, sorge spontanea la domanda:
le percentuali di crescita sono riferite ad un anno-zero in cui la ricrescita è iniziata; per comprendere appieno il fenomeno è necessario stimare questo anno di riferimento. Siamo in grado di farlo?

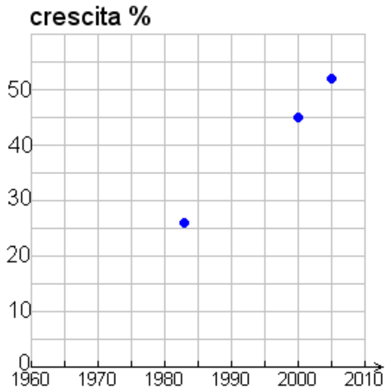
Analisi della situazione

Riportiamo i dati a nostra disposizione nella tabella a lato, in cui l'anno di riferimento è stato denotato con x (lettera usualmente adottata per denotare l'incognita).

anno	Crescita %
x	0
1983	26
2000	45
2005	52

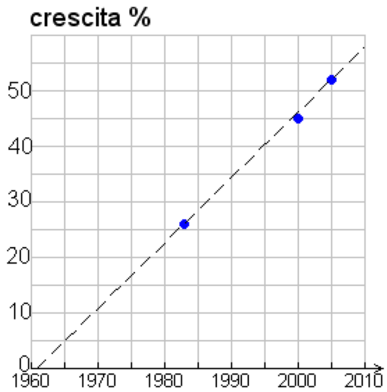
Approccio grafico

Trasferiamo i dati della tabella in un riferimento cartesiano (cfr. immagine a lato).
Il grafico mostra dei punti allineati!



Risposta al quesito
risoluzione per via grafica

Questa sorprendente regolarità suggerisce di affrontare la questione per via grafica.
Precisamente, se congiungiamo i punti con una linea retta (vedi immagine a lato) possiamo stimare l'anno zero intono al 1960.



Approccio algebrico

Per confermare questa congettura ed ottenere una stima più accurata, dobbiamo affrontare la questione per via algebrica.

Risposta al quesito
risoluzione per via numerica

Ricordiamo che[2]:

i punti $P_i = (a_i, b_i)$ $i = 1, 2, 3, ..., n$ si distribuiscono su una retta (non parallela ad alcuno degli assi coordinati), se e solo se le classi A e B delle *differenze* di coordinate omonime sono in proporzionalità diretta.

Pertanto nel nostro caso si ha

A - Differenza ascisse	B - Differenza ordinate
$1983 - x$	$26 - 0$
$2000 - 1983$	$45 - 26$
$2005 - 2000$	$52 - 45$

Per stimare la costante di proporzionalità fra le due classi valutiamo i rapporti fra gli elementi corrispondenti:

$$\frac{2000-1983}{45-26} = \frac{17}{19} \cong 0.89 \qquad \frac{2005-2000}{52-45} = \frac{5}{7} \cong 0,72$$

Da questa valutazione si scopre che i punti non sono allineati come appariva dal grafico! Comunque sono molto vicini ad esserlo e per il nostro scopo li possiamo pensare tali. Inoltre possiamo assumere la costante di proporzionalità pari alla media delle due costanti: $\frac{1}{2}\left(\frac{17}{19}+\frac{5}{7}\right) \cong 0.8$.

[2] Per i dettagli si può consultare [1]

Pertanto si ottiene l'equazione

Equazione risolvente

$$\frac{1983-x}{26}=0.8 \quad \Rightarrow \quad x=1983-20.8=1962.2$$

da cui si deduce che l'anno zero è il 1962.

Osservazione

Invece di imporre come costante di proporzionalità la media delle due costanti note, avremmo potuto assumere una costante di proporzionalità incognita, compresa fra i due dati noti. Avremmo così ottenuto il sistema di disequazioni

$$0.72 \le \frac{1983-x}{26} \le 0.89 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{1983-x}{26} \ge 0.72 \\ \dfrac{1983-x}{26} \le 0.89 \end{cases}$$

da cui

$$1959,86 \le x \le 1964,28$$

ovvero si può stimare l'anno zero compreso fra il 1960 e il 1964.

B2.6 Autonomia della nuova 500 ([1])

Valutare l'autonomia della nuova FIAT 500 lungo un percorso misto: per un terzo urbano e per i restanti due terzi, extraurbano.

Alcuni dati dalla scheda tecnica della nuova FIAT 500 1.2 8v Fire

Alimentazione benzina – capacità serbatoio		$35\,\ell$
Consumi per 100 km	**circuito urbano**	$6{,}4\,\ell$
	circuito extraurbano	$4{,}3\,\ell$
	circuito misto	$5{,}1\,\ell$
Fonte: Quattroruote, Gennaio 2012		

Costruzione del modello

Assumiamo che il consumo medio di carburante sia proporzionale alla lunghezza del percorso. Naturalmente la velocità media di un percorso urbano è diversa da quella di un percorso extra-urbano, inoltre nei consumi in città incidono le frequenti fermate (ai semafori, passaggi pedonali, …). Quindi i due coefficienti di proporzionalità sono diversi: 6,4 e 4,3 per il circuito urbano o extraurbano, rispettivamente.

Percorso urbano	
Lunghezza (km)	Consumo(litri)
100	6,4
1	6,4/100

Percorso extra urbano	
Lunghezza (km)	Consumo (litri)
100	4,3
1	4,3/100

autonomia

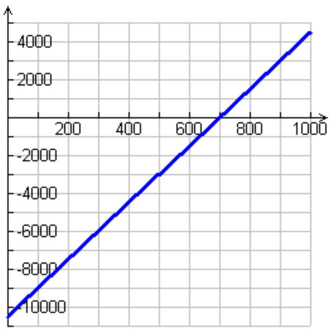
L'**autonomia** è la lunghezza x del tragitto che si può percorrere con il pieno.

Per rispondere al quesito occorre valutare il consumo C corrispondente ad un *percorso misto* (1/3 urbano e 2/3 extraurbano) ed impostare l'**equazione di equilibrio**

$$C = 35$$

Dai dati in tabella si deduce $C = \frac{1}{3}x\cdot\frac{6{,}4}{100} + \frac{2}{3}x\cdot\frac{4{,}3}{100}$, da cui

$$\frac{1}{3}x\cdot\frac{6{,}4}{100} + \frac{2}{3}x\cdot\frac{4{,}3}{100} = 35$$



L'equazione di I grado

$$(6{,}4+8{,}6)x - 10500 = 0$$

ammette come soluzione (cfr. anche grafico a lato)

$$x = \frac{10500}{15} = 700$$

Risposta al quesito

L'autonomia della nuova 500 è quindi di $700\,km$

Commento

Possiamo inoltre stabilite quale sia il consumo per 100 km in relazione al nostro percorso misto: $\frac{35}{700}\cdot 100 = 5{,}00$, da cui si evince che il percorso misto considerato dalla rivista è pressoché uguale a quello qui considerato.

Osservazione

Alla luce di quanto visto, possiamo costruire una formula che consente di valutare l'autonomia di una qualunque automobile, nota la capacità del serbatoio e i consumi nel percorso urbano ed extraurbano (questi dati sono dichiarati dalla casa costruttrice).

A questo proposito, denotati con k la capacità del serbatoio e con u ed e rispettivamente i consumi per 100 km in un circuito urbano o extraurbano, il consumo relativo ad un percorso misto di lunghezza x è

$$C = \frac{1}{3}x \cdot \frac{u}{100} + \frac{2}{3}x \cdot \frac{e}{100}$$

e l'equazione di equilibrio diventa

Equazione di equilibrio generale

$$\frac{1}{3}x \cdot \frac{u}{100} + \frac{2}{3}x \cdot \frac{e}{100} = k$$

A differenza della precedente equazione numerica, questa è letterale.
Risolvendo l'equazione di equilibrio si ottiene la formula

Formula generale dell'autonomia

$$\boxed{x = \frac{300 \cdot k}{u + 2e}}$$

che fornisce l'autonomia in funzione della capacità del serbatoio e dei consumi urbano ed extraurbano.

Proviamo a testare la formula dell'autonomia in alcuni casi.

Ferrari 458 Italia

Alimentazione benzina – capacità serbatoio		$86\,\ell$
Consumi per 100 km	circuito urbano	$17{,}7\,\ell$
	circuito extraurbano	$9{,}5\,\ell$
	circuito misto	$13{,}3\,\ell$
Fonte: Quattroruote, Gennaio 2012		

Smart fortwo 1000 coupé passion

Alimentazione benzina – capacità serbatoio		$33\,\ell$
Consumi per 100 km	circuito urbano	$6{,}2\,\ell$
	circuito extraurbano	$4\,\ell$
	circuito misto	$4{,}9\,\ell$
Fonte: Quattroruote, Gennaio 2012		

Applicando la formula, si ha:

- autonomia Ferrari 458 Italia : 702 km
- autonomia Smart for two 1000 : 697 km

Quindi l'autonomia delle tre auto è circa la stessa.

B2.7 Foto fai da te

Andrea ha scattato alcune foto che vorrebbe stampare. Dopo averle scaricate sul PC ha fatto alcuni tentativi.
In particolare dopo aver stampato una foto, l'ha ridotta (*zoom-in*) del 30% e stampata di nuovo. Il risultato non è stato soddisfacente e così per tornare al file iniziale ha operato un ingrandimento (*zoom-out*) del 30% ma, con sua grande sorpresa, la foto stampata non aveva più le dimensioni dell'originale.
a) Sai dire perché?
b) Di quanto avrebbe dovuto ingrandire la foto per tornare al formato originale?

Quesito a)
Prima trasformazione

Per semplificare la questione (senza operare cambiamenti significativi) possiamo assumere che la foto sia quadrata di lato ℓ.
Per rispondere al quesito, osserviamo che la dimensione ℓ subisce una riduzione in seguito allo *zoom-in* del 30%; precisamente denotata con r la dimensione della foto ridotta, risulta

$$r = \ell - \frac{30}{100}\ell = 0,7 \cdot \ell$$

Seconda trasformazione

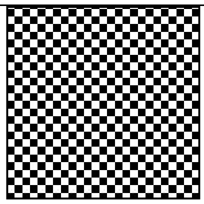
Successivamente la foto (ridotta) subisce uno *zoom-out* del 30%; denotata con i la dimensione della foto ingrandita, si ha

$$i = r + \frac{30}{100}r = 1,3 \cdot r$$

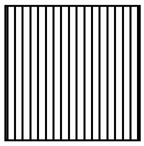
Possiamo sintetizzare le due trasformazioni nella tabella seguente

Dimensioni		
Originale	**Ridotta**	**Ingrandita**
ℓ	$r = 0,7 \cdot \ell$	$i = 1,3 \cdot r$

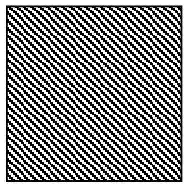
Le tre immagini seguenti illustrano la doppia trasformazione



F1 - Foto originale



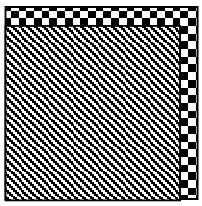
F2 - Foto F1 ridotta del 30%



F3 - Foto F2 ingrandita del 30%

Confronto fra immagine iniziale e finale

Sovrapponendo l'immagine iniziale con quella finale, si vede subito che non hanno la stessa dimensione!



Composizione di due trasformazioni

Infatti, *componendo* le due trasformazioni, $\ell \;\rightarrow\; r \;\rightarrow\; i$, si deduce

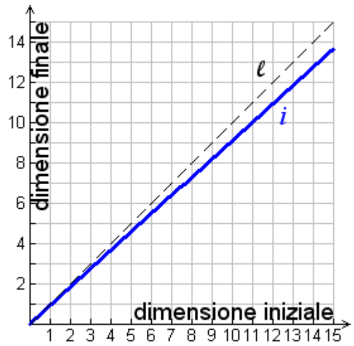
$$i = 1,3 \cdot r \quad \wedge \quad r = 0,7 \cdot \ell \quad \Rightarrow \quad i = i(\ell) = 1,3(0,7 \cdot \ell) = 0,91 \cdot \ell$$

Funzione
prezzo iniziale
prezzo finale

Come si vede bene dal grafico, *la dimensione finale è inferiore a quella iniziale* qualunque sia ℓ; infatti il grafico di i (retta continua) si trova al di sotto della bisettrice (retta tratteggiata).

Inoltre la differenza $\ell - i$ aumenta al crescere della dimensione iniziale ℓ.

Approfondiamo la questione ponendoci la domanda seguente



Quesito a')

a') Come varia la relazione *dimensione iniziale* - *dimensione finale* al variare della percentuale di riduzione-ingrandimento?

Denotata con s la percentuale di riduzione, analogamente a quanto visto per la risposta al primo quesito, si ottiene lo schema

Dimensioni		
Originale	**Ridotta**	**Ingrandita**
ℓ	$r_s = \ell - s \cdot \ell = (1-s)\ell$	$i_s = r_s + s \cdot r_s = (1+s)r_s$

da cui si deduce

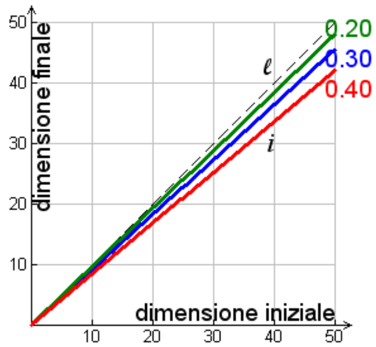
$$i_s = i_s(\ell) = (1-s^2)\ell$$

Le funzioni

Classe di funzioni
al variare del *parametro*

$$i_s = i_s(\ell) = (1-s^2)\ell \quad 0 < s < 1$$

al variare del parametro s, rappresentano un fascio di rette (cfr. grafico a lato).



Confronto grafico

Graficamente è evidente che

$$i_s(\ell) < \ell \quad \text{per ogni} \quad \ell > 0$$

per ogni valore di s, con $0 < s < 1$.

Confronto algebrico

Verifichiamolo per via algebrica, proviamo cioè che la disequazione

$$\boxed{i_s(\ell) = (1-s^2)\ell < \ell}$$

è un'identità, ossia è valida per ogni $\ell > 0$.

Discussione disequazione

Dividendo entrambi i membri per ℓ ($\ell > 0$), si deduce

$$1 - s^2 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad s^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad s \neq 0$$

In altre parole, per ogni possibile valore di s, con $0 < s < 1$, la dimensione finale è inferiore a quella iniziale, con fattore di riduzione pari a $1 - s^2$.

Quesito b)

In virtù di quanto appena dimostrato, si intuisce che per riottenere la dimensione originale la percentuale di ingrandimento deve essere superiore a quella di riduzione. Denotata con x la percentuale di ingrandimento, deve risultare

$$(1+x)0,7\cdot\ell=\ell$$

ovvero

$$(1+x)0,7\cdot\ell=\ell$$

la cui unica soluzione, indipendente dalla dimensione iniziale ℓ, è

$$x=\frac{0,3}{0,7}=\frac{3}{7}\cong 0.42$$

Risposta al quesito

Un ingrandimento del 42% (circa) avrebbe consentito ad Andrea di riottenere la dimensione originale!

Approfondimento

Affrontiamo la questione del quesito b) nel caso generale.

Denotata con s la percentuale di riduzione e con a quella di ingrandimento, risulta

Dimensioni		
Originale	**Ridotta**	**Ingrandita**
ℓ	$r_a=\ell-s\cdot\ell=(1-s)\ell$	$i_{a,s}=(1+a)r_a=(1+a)(1-s)\ell$

Si tratta allora di vedere se per opportuni valori dei due parametri a ed s la dimensione finale $i_{a,s}$ è pari a quella iniziale, ovvero

Equazione di pareggio

$$\boxed{(1+a)(1-s)\ell=\ell}$$

Essendo $\ell>0$, si ottiene $(1+a)(1-s)=1$, da cui (poiché $s\neq 1$)

$$1+a=\frac{1}{1-s}\quad\Leftrightarrow\quad a=\frac{s}{1-s}$$

Risposta al quesito

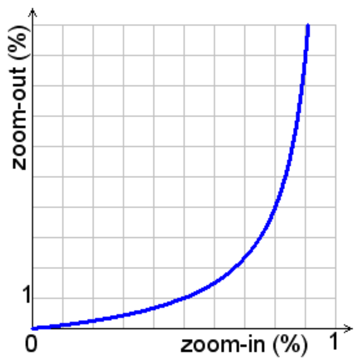
In definitiva questa è la relazione che lega la percentuale di riduzione s e quella di ingrandimento a per ottenere il pareggio fra dimensione iniziale e finale.

Osserviamo che tale relazione è *indipendente dalla dimensione* ℓ, inoltre risulta

$$0<s<a=\frac{s}{1-s}$$

Osservazione

Infine, come si vede dal grafico (cfr. immagine a lato) a è una funzione crescente del coefficiente s.



Tabuliamo alcuni valori

Zoom-in	Zoom-out
0	0
0,3	0,42
0,5	1
0,7	2,3

In particolare si ritrova un risultato intuitivo: se si riduce un'immagine del 50% per riottenere la dimensione originale occorre operare un successivo ingrandimento del 100% ovvero raddoppiare le dimensioni!

B2.8 Strategia di coltivazione ([1])

Mario possiede un appezzamento di terreno e vorrebbe coltivarlo a grano (tenero) ed orzo.

L'Ufficio Regionale di sostegno all'agricoltura gli fornisce alcuni dati:

- **per evitare la monocoltura è richiesto che non più del 70 % dell'area sia riservata ad una delle due colture**
- **ogni ettaro produce in media 50 q di orzo oppure 45 q di grano**
- **gli attuali prezzi unitari di vendita dell'orzo e del grano sono rispettivamente 20 € e 22 € il quintale.**

a) Mario si chiede se sia possibile impostare una strategia di coltivazione che consenta di ottenere un ricavo dall'orzo pari a quello del grano (tenuto conto dei prezzi attuali di vendita).

b) Mario sarebbe interessato a valutare come varia la strategia al variare dei prezzi unitari di vendita dell'orzo e del grano.

Quesito a)
Normalizzazione

Per semplicità, possiamo operare una *normalizzazione* assumendo pari ad $1 = 100\%$ la superficie complessiva da coltivare. Così, se indichiamo con x la *frazione* coltivata a grano, quella riservata all'orzo sarà pari ad $1-x$.

	grano	orzo
Produzione (q/ettaro)	45	50
Ricavo (€/quintale)	22	20
Coltivazione (%)	x	1-x

In virtù dei vincoli regionali, deve risultare

Vincoli
Sistema di disequazioni

$$\begin{cases} 0 \le x \le 0.7 \\ 0 \le (1-x) \le 0.7 \end{cases} \Rightarrow \quad 0.3 \le x \le 0.7$$

Così Mario prevede una produzione di grano di $45x$ quintali, con un ricavo pari ad euro

$$R_{grano} = 22 \cdot 45x$$

ed una produzione di orzo di $50(1-x)$, che produce un ricavo pari ad euro

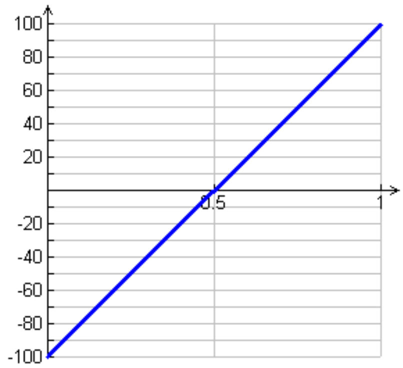
$$R_{orzo} = 20 \cdot 50(1-x)$$

Relazione di equilibrio

Imponendo la *parità* fra i due ricavi deve risultare

$$990x = 1000(1-x) \quad \Leftrightarrow \quad 199x - 100 = 0$$

Equazione di I grado la cui unica soluzione è (cfr. grafico a lato)



$y = 199x - 100$

Soluzione equazione

$$x = \frac{100}{199} \cong 0.5$$

Validazione della soluzione

Dovendo la soluzione essere compresa nell'intervallo $[0{,}3,\ 0{,}7]$, il risultato ottenuto è accettabile.

Risposta al quesito

In definitiva *è possibile* ottenere pari ricavo dall'orzo e dal grano con una coltura perfettamente equilibrata: 50% orzo e 50% grano.

Quesito b) Prezzi variabili

Indicati con p il prezzo al quintale del grano e con q il prezzo al quintale dell'orzo, i ricavi di grano e orzo sono rispettivamente

$$R_{grano} = p \cdot 45x \quad R_{orzo} = q \cdot 50(1-x)$$

di conseguenza l'equazione di equilibrio diventa

$$p \cdot 45x = q \cdot 50(1-x) \quad \Rightarrow \quad (p \cdot 45 + q \cdot 50)x - q \cdot 50 = 0$$

che, essendo $q > 0$, si può esprimere in modo equivalente nella forma

Equazione di equilibrio

$$\left(\frac{p}{q}45 + 50\right)x - 50 = 0$$

Si tratta di un'equazione letterale, che, per ogni valore dei parametri $p > 0 \quad q > 0$ ammette come soluzione

Soluzione

$$x = \frac{50}{\frac{p}{q}45 + 50}$$

validazione della soluzione

Imponendo infine i vincoli di coltivazione, deve risultare

$$0{,}3 \le \frac{50}{\frac{p}{q}45 + 50} \le 0{,}7$$

che equivale al sistema

$$\begin{cases} \dfrac{50}{\frac{p}{q}45 + 50} \le 0{,}7 \\ \dfrac{50}{\frac{p}{q}45 + 50} \ge 0{,}3 \end{cases}$$

la cui soluzione è $\dfrac{10}{21} \le \dfrac{p}{q} \le \dfrac{70}{27}$

Conclusione

Se il rapporto fra i prezzi unitari del grano e dell'orzo è compreso nell'intervallo $\left[\frac{10}{21}, \frac{70}{27}\right]$, Mario è in grado di rispettare i vincoli di coltivazione ed avere lo stesso incasso dal grano e dall'orzo.

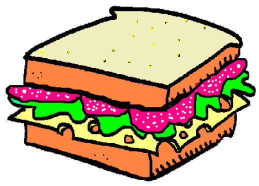
La strategia di coltivazione deve rispettare le seguenti percentuali (rispettivamente per la superficie a grano e quella ad orzo)

$$\frac{50}{\frac{p}{q}45+50} \qquad 1-\frac{50}{\frac{p}{q}45+50}$$

Come caso particolare, si ritrova la strategia del punto a)

$$\frac{p}{q}=\frac{11}{10} \qquad x=\frac{100}{199}$$

B2.9 Pausa pranzo



Vicino alla sede della Facoltà di Ingegneria a Perugia, c'è un supermarket, con banco di prodotti da forno che è spesso utilizzato dagli studenti in pausa pranzo. Il luogo è piacevole (giardino con laghetto) e lo preferiscono alla mensa universitaria. Poiché c'è sempre una lunga fila per pagare, in genere gli acquisti dei ragazzi sono cumulativi.

Andrea ha acquistato 10 pezzi di pizza e 5 lattine di bibite varie, spendendo 28,75 €; Maria ha pagato 19,10 € per 2 confezioni di Coca-Cola da 3 lattine e 5 panini imbottiti.
La "regola" è quella di pagare a consumazione e non dividere alla romana.
Per fare i conti velocemente, Maria propone di valutare il costo (medio) delle bibite e delle vivande.
Quale sarà il suo risultato?

Risposta al quesito

Il problema ha due incognite: x costo (medio) di una bibita e y costo (medio) di un pezzo salato, legate dalle relazioni

$$\begin{cases} 10y+5x=28,75 \\ 5y+6x=19,10 \end{cases}$$

Il sistema di due equazioni in due incognite ha determinante non nullo e quindi ammette una sola soluzione

$$\begin{cases} x=1,35 \\ y=2,20 \end{cases}$$

QUESITI E MODELLI

Acqua salata [3]

Nella cittadina di Maple Grove (USA) i costi per il consumo (annuo) dell'acqua potabile – erogata dalla riserva municipale – sono calcolati sommando una quota fissa e una quota variabile, proporzionale ai consumi (in *cubic feet* ;1 foot = 30,48 cm).

Quota fissa ($)	65
Quota variabile ($)	0,025

a) Valutare la spesa di un contribuente che consuma 1.600 *cubic feet*

b) A quanto ammonta il consumo di un contribuente che ha ricevuto un bolletta di 93 $?

Una concentrazione particolare [3]

Il Sig. Rossi ha il problema di eliminare le incrostazioni di calcare nella caldaia dell'impianto di riscaldamento. Un amico gli consiglia di sottoporre la caldaia a un ciclo di lavaggio forzato con una soluzione acquosa al 20% di acido cloridrico (HCl). L'amico inoltre gli fornisce tre litri di soluzione al 40%, che però non sono sufficienti.
Il Sig. Rossi acquista allora una nuova confezione di 10 litri, concentrata all'80%.
Poiché per il lavaggio sono necessari 10 litri di soluzione al 20%, il Sig. Rossi comincia a diluire ulteriormente tutta la soluzione ricevuta dall'amico, poi si serve di una parte della confezione che ha acquistato.
Quali sono le miscelazioni (acqua da aggiungere) necessarie per avere il prodotto pronto per l'uso?

Indice BMI [3]

Nella campagna per la prevenzione delle malattie dovute al soprappeso, è stato recentemente individuato un metodo rapido e alla portata di tutti per *misurare l'obesità*.
Si tratta del *body mass index* (*BMI*) misurato in , che si ottiene come rapporto fra il peso (in chilogrammi) di un individuo e il quadrato della sua altezza (in metri)

$$BMI = \frac{peso}{(altezza)^2}$$

a) Sulla base dei dati riportati nella tabella a lato, calcolare gli intervalli ponderali relative a ciascuna categoria per una persona alta 1,70 m. (fonte: attp://en.wikipedia.org/wiki/Body_mass_index)

b) determinare la formula che fornisce il peso in funzione del BMI e dell'altezza.

Categoria	**BMI**
sottopeso	< 18,5
normale	da 18,5 a 24,9
sovrappeso	da 25 a 29,9
Obesità moderata	da 30 a 34,9
Obesità	da 35 a 40
Obesità grave	> 40

Offerte Natalizie

a) Un venditore di scarpe prima di Natale aumenta i prezzi del 20%, finite le feste vende tutta la merce con uno sconto del 20%. Qual è il prezzo a gennaio di un articolo che prima di Natale costava p?

b) Come varia la relazione *prezzo iniziale - prezzo finale* se si cambia la percentuale di sconto?
Scegliendo opportunamente le percentuali di aumento e sconto, si può fare in modo che il prezzo a gennaio sia pari a quello iniziale?

Referenze

Riferimenti strettamente collegati

[1] P.Brandi-A.Salvadori, Matematica&Realtà, Percorsi di sperimentazione didattica - B, Università degli Studi di Perugia (2010)
[2] P.Brandi-A.Salvadori, Prima di iniziare (Conoscenze e competenze Matematiche di base per l'Università) Aguaplano-Officina del Libro, Passignao c.T. (2011)
[3] P.Brandi-A.Salvadori, Modelli matematici elementari, Ed. B.Mondadori (2004)

I Dossier M&R di Alice&Bob con contributi delle varie Unità Locali M&R

P.Brandi - A.Salvadori, *Media e valori medi – prima parte.* Alice e Bob, 11-12 (2009) 27-30, 34-38
P.Brandi - A.Salvadori, *Media e valori medi – seconda parte.* Alice e Bob, 13 (2009) 19-22, 27-

I progetti di approfondimento svolti dai ragazzi partecipanti ai Laboratori M&R con la guida dei loro Tutor e presentati al convegno annuale Esperienze a confronto.

AA.VV. Matematica&Realtà, Esperienze a confronto DVD (aggiornamento 2011)

INDICE