

Matematica & Realtà

I Fase Gara di Modellizzazione - Test finale 2016-2017

Tempo massimo per lo svolgimento: 90 min

Nome Cognome

Tempo impiegato per lo svolgimento (in minuti, da trascrivere a cura del tutore di aula)

Sezione Avanzata

Rispondere ai quesiti seguenti motivando brevemente le risposte ed aggiungendo eventualmente un commento sul risultato ottenuto.

1. Make up Italia

Un rimmel non è cosa effimera per l'industria italiana. Secondo Cosmetica Italia, la Confindustria del beauty, quest'anno il valore della produzione supererà i 9,6 miliardi di euro; dà lavoro a 35 mila persone (54 per cento donne, 11 per cento con laurea) e cresce del**10**..... per cento l'anno, macina utili anche in tempi di crisi, vende fuori dai confini nazionali il 70 per cento di ciò che realizza. Quest'anno l'export aumenterà di un altro 8 per cento grazie al boom di richieste di Stati Uniti ed Emirati Arabi.



Renato Ancorotti, 59 anni, è il re del mascara. La Ancorotti Cosmetics è nata nel 2008, inizio crisi, cresce ogni anno del 30 per cento e chiuderà il 2015 a 40 milioni di fatturato: ha 130 dipendenti e 9 stabilimenti. Produce 800 mila chili di rimmel - 100 milioni di pezzi l'anno - ne esporta il 77 per cento. "E' il prodotto più venduto nel mondo, se ne fa un miliardo di pezzi l'anno e noi ne controlliamo un decimo."

Fonte: L'espresso 3 settembre 2015

1.1. Riempire lo spazio dei punti assunto che il modello $p(t) = 9,6 e^{0,095t}$ descriva il valore della produzione di rimmel in Italia (miliardi di euro) in funzione del tempo (anni).

Per rispondere al quesito dobbiamo riscrivere il modello nella forma $p(t) = 9,6(1+k)^t$ e valutare il parametro k .

Precisamente si ha

$$1+k = e^{0,095} \Rightarrow k = e^{0,095} - 1 \cong 0,099 \cong 0,01$$

da cui si deduce che la crescita è del 10% all'anno.

1.2. Costruire un modello che descriva il fatturato della Ancorotti Cosmetics nel periodo 2008-2015.

$$f(t) = 6,37 \cdot 1,3^t \quad 0 \leq t \leq 7$$

Se adottiamo un modello esponenziale del tipo $f(t) = f(0)k^t \quad 0 \leq t \leq 8$

dalle informazioni dell'articolo deduciamo che

$$\begin{cases} k = 1,3 \\ f(7) = 40 \end{cases} \Rightarrow f(0)(1,3)^7 = 40$$

da cui

$$\begin{aligned} \log[f(0)] + 7 \log 1,3 &= \log 40 \\ f(0) &\cong 6,37 \end{aligned}$$

In conclusione il modello che descrive il fatturato della Ancorotti Cosmetics nel periodo 2008-2015 è dato dalla funzione

$$f(t) = 6,37 \cdot 1,3^t \quad 0 \leq t \leq 7$$

2. Buco dell'ozono

Il buco dell'ozono è una riduzione dello strato di ozono stratosferico (ozonosfera) che si verifica, principalmente in primavera, sopra le regioni polari.

https://it.wikipedia.org/wiki/Buco_nell'ozono

Il buco dell'ozono nel mese di ottobre ha raggiunto livelli record. Secondo i dati forniti dalla Nasa, la falla nello strato di gas che protegge la Terra dai raggi ultravioletti si estende sull'Antartide per 28,2 milioni di chilometri quadrati, mentre l'anno precedente era larga "solo 24,1". L'Organizzazione Mondiale della Meteorologia prevede un miglioramento, probabilmente non prima del 2070. Fonte: L'Espresso 18 febbraio 2016

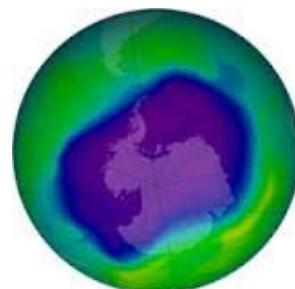


Immagine del più grande buco nell'ozono sopra l'Antartico mai registrato (Settembre 2006). Foto: NASA

2.1. Assunto che il trend resti invariato, costruire un modello che descriva l'area (km²) in funzione del tempo (anni).

$$A_n = 24,1(1,17)^n \quad n = 0,1,2,\dots$$

oppure

$$A(t) = 24,1 \cdot (1,17)^t \quad t \geq 0$$

Sulla base del modello, rispondere ai quesiti seguenti.

2.2. Stimare il tempo di raddoppio.

Circa 4 anni e mezzo

2.3. Valutare il rapporto dei diametri (diametro al tempo t / diametro iniziale) in funzione del rapporto fra le aree.

$$(1,17)^{n/2} \text{ oppure } (1,17)^{t/2}$$

2.1. Dai dati forniti nell'articolo, deduciamo che in un anno il buco è aumentato di 28,2 - 24,1 = 4,1 milioni di km², corrispondenti ad un aumento percentuale di

$$\text{circa il } 17\%: \frac{4,1}{24,1} \cdot 100 \cong 17\%$$

Assunto come anno zero il 2014, possiamo adottare il modello esponenziale seguente

$$\begin{cases} A_0 = 24,1 \text{ start} \\ A_{n+1} = (1+0,17)A_n \end{cases} \Rightarrow A_n = 24,1(1,17)^n \quad n = 0,1,2,\dots$$

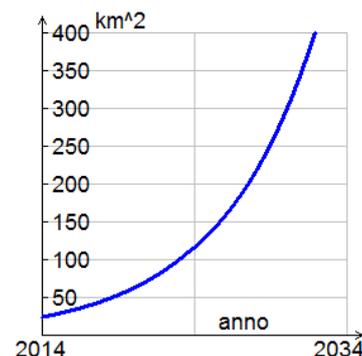
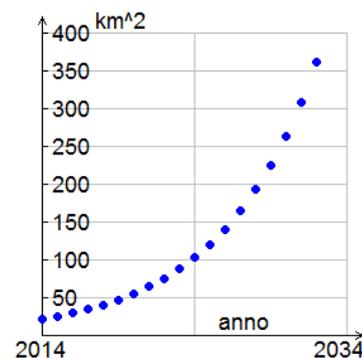
ove n è il numero di anni trascorsi a partire dall'anno zero 2014, ed A_n è la superficie del buco (in milioni di km²) all'n-esimo anno.

Il grafico della funzione è riportato nell'immagine a lato.
oppure

$$\text{(mod. continuo)} \quad A(t) = 24,1 \cdot (1,17)^t \quad t \geq 0$$

ove t è il tempo (in anni) a partire dal 2014 (anno zero), ed A(t) è la superficie del buco (in milioni di km²) all'anno t.

Il grafico della funzione è riportato nell'immagine a lato.



2.2. (caso discreto) Si tratta di risolvere la disequazione

$$A_n \geq 2A_0 \Leftrightarrow 24,1 \cdot (1,17)^n \geq 2 \cdot 24,1$$

da cui

$$n \geq \frac{\log 2}{\log 1,17} \cong 4,41$$

(caso continuo) Si tratta di risolvere la disequazione

$$A(t) \geq 2A_0 \Leftrightarrow 24,1 \cdot (1,17)^t \geq 2 \cdot 24,1$$

da cui

$$t \geq \frac{\log 2}{\log 1,17} \cong 4,41$$

Commento. Secondo il modello, l'area del buco dell'ozono raddoppierebbe in circa 4 anni e mezzo.

$$2.3. \text{ Poniamo } \rho_n = \frac{A_n}{A_0} \left[\rho(t) = \frac{A(t)}{A(0)} \right].$$

$$\text{Dalla formula dell'area, si deduce l'espressione del diametro: } d_n = 2\sqrt{\frac{A_n}{\pi}} \left[d(t) = 2\sqrt{\frac{A(t)}{\pi}} \right]$$

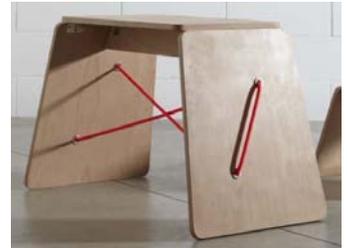
Risulta pertanto:

$$\frac{d_n}{d_0} = \frac{2\sqrt{\frac{A_n}{\pi}}}{2\sqrt{\frac{A_0}{\pi}}} = \sqrt{\frac{A_n}{A_0}} = \sqrt{\rho_n} = (1,17)^{n/2} \quad \left[\frac{d(t)}{d(0)} = \frac{2\sqrt{\frac{A(t)}{\pi}}}{2\sqrt{\frac{A(0)}{\pi}}} = \sqrt{\frac{A(t)}{A(0)}} = \sqrt{\rho(t)} = (1,17)^{t/2} \right]$$

Comento di M&R: nella foto della NASA l'estensione del buco dell'ozono è circa la metà della superficie di un emisfero. Se in 4,5 anni l'area raddoppia, ben prima del 2070 la sua estensione comporterebbe la totale sparizione dell'ozonosfera con gravi conseguenze per la salute degli esseri viventi.

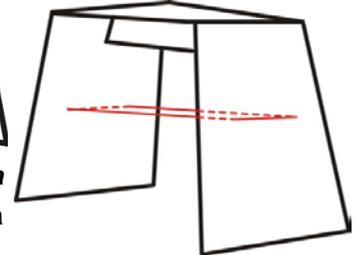
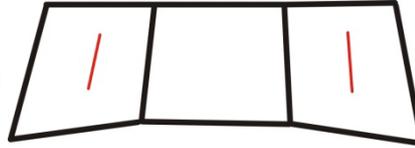
3. Design for good

Etica ed estetica, sostenibilità e bellezza. Il doppio volto dei progettisti che migliorano il mondo. Può un ospedale essere bello oltre che funzionale. E può una scuola della Repubblica Dominicana far studiare i propri alunni su banchi di design? La creatività e lo stile, per come li conosciamo, sembrano fuori luogo in contesti di guerra e di povertà. Oggi tuttavia sono numerosi i progettisti che fanno del loro lavoro un mezzo di cambiamento sociale in aree degradate o nel sud del mondo. Fonte: Effe, 68 febbraio 2017



Paco y paco di Claudio Larcher, simbolo della campagna Hispaniola-Design di solidarietà

M&R ha disegnato lo sgabello Paco y paco posizionando, per semplicità, i fori per il cordone rosso in un segmento parallelo al pavimento a metà altezza dell'alzata (vedi figure a lato).



3.1. Determinare la lunghezza del cordone in funzione dell'angolo β di apertura di ciascuna alzata [Dimensioni: a = larghezza della seduta; b = profondità della seduta;

h = altezza di ciascuna alzata; distanza fra i fori = $b/2$]

$$L(\beta) = b + 2a + 2h \sin \beta$$

3.2 Stimare la lunghezza di cui al punto 2.1 nel caso $a = h = 40 \text{ cm}$; $b = 35 \text{ cm}$; $\beta = 18^\circ$

140 cm

3.1. La lunghezza del cordone è pari al doppio della lunghezza \overline{AB} a cui va aggiunto il doppio della distanza fra i fori ($2 \cdot \frac{b}{2}$).

Ricorrendo alle formule risolutive dei triangoli rettangoli, con semplici considerazioni si deduce

$$\overline{AB} = \overline{HK} + 2 \cdot \overline{AK} = a + 2 \cdot \frac{h}{2} \sin \beta$$



In conclusione, indicata con $L(\beta)$ la lunghezza del cordino in funzione dell'angolo β deve risultare

$$L(\beta) = b + 2a + 2h \sin \beta$$

3.2. Si tratta di valutare la funzione $L(\beta)$ per $\beta = 18^\circ$; $a = h = 40 \text{ cm}$; $b = 35 \text{ cm}$, ottenendo

$$L(18^\circ) = 35 + 80 + 80 \sin 18^\circ = 115 + 20(-1 + \sqrt{5}) \cong 139,72 \cong 140 \text{ cm}$$

GRIGLIA DI VALUTAZIONE	Punteggio max.	
1. Make up Italia	1.1 risposta	1
	1.1 motivazioni	2
	1.2 risposta	1
	1.2 motivazioni	4
2. Buco dell'ozono	2.1 risposta	1
	2.1 motivazione	4
	2.2 risposta	1
	2.2 motivazione	2
	2.3 risposta	1
	2.3 motivazione	2
	commento	1
3. Design for good	3.1 risposta	1
	3.1 motivazione	3
	3.2 risposta	1
	3.2 motivazione	3
	commento	2
	TOTALE	30

N.B. Poiché la valutazione degli elaborati è finalizzata anche alla selezione dei finalisti, raccomandiamo vivamente di evitare valutazioni ex-equò, tenendo conto del tempo impiegato, utilizzando tutte le voci della griglia e, se necessario, ricorrendo a frazioni di punto.